

# การจัดเรียงใหม่เป็นหนึ่งมิติของอนุกรมซ้อนกันและสูตรลดทอน

## Rearrangement to one-dimensional iterated series and reduction formulas

รัชนาย ไช้แก้ว<sup>1</sup> และ ฉัตรชัย พุฒิรุ่งโรจน์<sup>2\*</sup>

Rachanai Kaikeaw<sup>1</sup> and Chatchai Puttirungroj<sup>2\*</sup>

Received: 13 July 2023 ; Revised: 5 October 2023 ; Accepted: 6 November 2023

### บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอในการจัดเรียงอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นให้เป็นอนุกรมชั้นเดียวโดยใช้วิธีพื้นฐานในการพิสูจน์ และอาศัยเงื่อนไขดังกล่าวเพื่อสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \cdots x_k)^t \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$

เมื่อ  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  และ  $t \in \{0, 1, 2\}$ , โดยใช้วิธีทางฟังก์ชันก่อกำเนิด

คำสำคัญ: อนุกรมหลายชั้น, อนุกรมซ้อนกัน, สูตรลดทอน

### Abstract

This article investigates the sufficient conditions for the rearrangement of multiple iterated series into a single-level series through the utilization of fundamental proof methods. These conditions were subsequently applied to establish reduction formulas for a series of the form  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \cdots x_k)^t \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$ , where  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  and  $t \in \{0, 1, 2\}$ , employing techniques derived from generating functions.

**Keywords:** Multiple series, iterated series, reduction formula

<sup>1</sup> คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร Email rachanai.k@dru.ac.th

<sup>2</sup> สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช นนทบุรี Email cputtirungroj@gmail.com

<sup>1</sup> Faculty of Science and Technology, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok

<sup>2</sup> School of Educational Studies, Sukhothai Thammathirat Open University, Nonthaburi

\* Corresponding author E-mail: cputtirungroj@gmail.com

**บทนำ**

ในปี ค.ศ. 2011 Furdui และ Trif (Furdui & Trif, 2011) ได้ศึกษาวิธีทั่วไปสำหรับการหาผลรวมของอนุกรมที่อยู่ในรูป  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m}$  เมื่อ  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  เป็นลำดับของจำนวนจริงภายใต้เงื่อนไขบางประการ และในบทความเดียวกันพวกเขาได้หารูปแบบปิดของอนุกรมที่อยู่ในรูป  $\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} a_{n_1+n_2+\dots+n_k}$  อีกด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Furdui (Furdui, 2013) กล่าวถึงปัญหาปลายเปิดและข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับอนุกรมหลายชั้น  $\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k=1}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_k}{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}$  ซึ่งปัญหานี้ถูกแก้โดย Furdui และ Qin ในปี ค.ศ. 2015 (Qin & Furdui, 2015)

จากผลงานของ Furdui ผู้วิจัยสังเกตเห็นว่ามีขั้นตอนบางส่วนที่สามารถขยายแนวคิดไปยังอนุกรมอื่นที่มีลักษณะคล้ายกันได้ ในบทความนี้ เราพิจารณาอนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \tag{1.1}$$

เมื่อ  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R}$  และ  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathbb{N}_0$  แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ) วัตถุประสงค์ของบทความนี้คือการพิสูจน์ทฤษฎีบทการจัดเรียงใหม่เป็นหนึ่งมิติ ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำคัญที่จะทำให้เราสามารถนำแต่ละพจน์ของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นมาจัดเรียงใหม่ให้เป็นแนวตรงได้ จากนั้นอาศัยทฤษฎีบทดังกล่าวในการสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรม (1.1) ให้เป็นอนุกรมอนันต์ชั้นเดียว และสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่มีรูปแบบเฉพาะบางชนิด นั่นคือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \dots x_k)^t \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \tag{1.2}$$

เมื่อ  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  และ  $t \in \{0, 1, 2\}$

หมายเหตุ ในที่นี้ กำหนด  $(x_1 x_2 \dots x_k)^t = I$  เมื่อ  $t = 0$  และ  $x_1 x_2 \dots x_k = 0$

**ความรู้พื้นฐาน**

อนุกรมหลายชั้น (multiple series) มีรูปแบบทั่วไปได้หลายลักษณะ เช่น รูปแบบ (2.1) และ (2.2) ต่อไปนี้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{2.1}$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{2.2}$$

เมื่อ  $A: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{C}$  อนุกรมทั้งสองรูปแบบมีความหมายและบทนิยามของการลู่ออกแตกต่างกัน ในบทความนี้ เราสนใจอนุกรมรูปแบบ (2.1) ซึ่งเรียกว่า อนุกรมซ้อนกันหลายชั้น (multiple iterated series) (Furdui, 2013) และมีบทนิยามของการลู่ออก ดังนี้

**บทนิยาม 2.1**

สำหรับจำนวนเต็ม  $k \geq 2$  และ  $A: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{C}$  เราจะกล่าวว่า อนุกรมซ้อนกัน  $k$  ชั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

ลู่ออก ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. อนุกรมซ้อนกัน  $k - 1$  ชั้น

$$\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

ลู่ออก ทุก  $x_1 \in \mathbb{N}_0$ .

2. อนุกรม  $\sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1)$  ลู่ออก โดยที่

$$B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \text{ทุก } x_1 \in \mathbb{N}_0$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักจะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเรื่องอนุกรมอนันต์ซึ่งพบได้ทั่วไปจากเอกสารเกี่ยวกับแคลคูลัสและคณิตวิเคราะห์ ในที่นี้จะอ้างถึงเฉพาะข้อเท็จจริงบางส่วนเท่าที่จำเป็น

**บทตั้ง 2.1**

ให้  $A: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ถ้า  $\sum_{x=0}^{\infty} A(x)$  ลู่ออก และ  $A(x) \geq 0$  ทุก  $x \in \mathbb{N}_0$  แล้ว ทุกจำนวนจริง  $\alpha$  ซึ่ง  $\alpha < \sum_{x=0}^{\infty} A(x)$  จะมีจำนวนเต็ม  $N > 0$  ซึ่ง  $\sum_{x=0}^N A(x) > \alpha$

**บทตั้ง 2.2**

ให้  $A: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ถ้า  $\sum_{x=0}^{\infty} A(x)$  ลู่ออก  $A(x) \geq 0$  และทุก  $x \in \mathbb{N}_0$  แล้ว ทุกจำนวนจริง  $\alpha > 0$  จะมีจำนวนเต็ม  $N > 0$  ซึ่ง  $\sum_{x=0}^N A(x) > \alpha$

บทตั้ง 2.1 และบทตั้ง 2.2 สามารถขยายแนวคิดไปสู่อนุกรมซ้อนกันหลายชั้นได้เป็นบทตั้ง 2.3 และบทตั้ง 2.4 ตามลำดับ

**บทตั้ง 2.3**

ให้  $k \in \mathbb{N}$  และ  $A: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R}$

ถ้าอนุกรม  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  ลู่ออก และ

$A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$  ทุก  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0^k$  แล้วจะได้ว่า ทุกจำนวนจริง  $\alpha$  ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

จะมีเซตจำกัด  $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$  ซึ่ง

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$$

**บทพิสูจน์**

พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร  $k$

ขั้นฐานของการอุปนัย

(กรณี  $k = 1$ ) เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 2.1

ขั้นการอุปนัย (สมมติให้บทตั้งเป็นจริงกรณี  $k$  จะ

พิสูจน์ว่าบทตั้งเป็นจริงกรณี  $k + 1$ )

ในการพิสูจน์บทตั้งกรณี  $k + 1$  จะเริ่มจากการสมมติ

ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ลู่เข้า และ } A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \geq 0 \text{ ทุก } x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{N}_0^{k+1}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ลู่เข้าทุก } x_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ เราจึงสามารถกำหนดให้}$$

$$B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$$

ทุก  $x_1 \in \mathbb{N}_0$  นอกจากนี้ กำหนดให้  $\beta = \sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1)$

ส่วนที่เหลือคือการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

“ทุกจำนวนจริง  $\alpha$  ซึ่ง  $\alpha < \beta$  จะมีเซตจำกัด

$$S \subseteq \mathbb{N}_0^{k+1} \text{ ซึ่ง } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$$

ให้  $\alpha$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $\alpha < \beta$  จะได้

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1) \text{ จากบทตั้ง 2.1 จะมีจำนวนเต็ม}$$

$$N > 0 \text{ ที่ทำให้ } \sum_{x_1=0}^N B(x_1) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } B(x_1) - \frac{\beta - \alpha}{2N} < B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$$

ทุก  $x_1 \in \mathbb{N}_0$  เมื่อใช้บทตั้งนี้ในกรณี  $k$  กับอนุกรม

$$\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ทุกค่า } x_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ จะได้ว่า แต่ละ } x_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ จะมีเซตจำกัด } S_{x_1} \subseteq \mathbb{N}_0^k \text{ ซึ่ง}$$

$$\sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > B(x_1) - \frac{\beta - \alpha}{2N}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^N \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \sum_{x_1=0}^N B(x_1) - \frac{\beta - \alpha}{2} > \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} = \alpha$$

เพราะฉะนั้น จึงมีเซตจำกัด

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \mid 0 \leq x_1 \leq N, (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1} \right\}$$

ซึ่ง

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{x_1=0}^N \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$$

□

**บทตั้ง 2.4**

ให้  $k \in \mathbb{N}$  และ  $A: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R}$

ถ้า  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$  ลู่ ออก

และ

$A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$  ทุก  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}_0^k$  แล้ว ทุกจำนวนจริง  $\alpha > 0$  จะมีเซตจำกัด  $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$  ซึ่ง

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$$

**บทพิสูจน์**

พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร  $k$

ขั้นฐานของการอุปนัย

(กรณี  $k = 1$ ) เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 2.2

ขั้นการอุปนัย

(สมมติให้บทตั้งเป็นจริงกรณี  $k$  จะพิสูจน์ว่าบทตั้ง

เป็นจริงกรณี  $k + 1$ )

ในการพิสูจน์บทตั้งกรณี  $k + 1$  จะเริ่มจากการสมมติ

$$\text{ว่า } \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$$

ลู่ออกและ

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \geq 0 \text{ ทุก } x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{N}^{k+1}$$

จากนั้นจะต้องพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

“ทุกจำนวนจริง  $\alpha > 0$  จะมีเซตจำกัด

$$S \subseteq \mathbb{N}_0^{k+1} \text{ ซึ่ง } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$$

จากบทนิยาม 2.1 เมื่อ

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ลู่ออก จะเกิดได้}$$

2 กรณี คือ

1. กรณีมี  $x_j \in \mathbb{N}_0$  ที่ทำให้

$$\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ลู่ออก}$$

ให้จำนวนจริง  $\alpha > 0$  โดยบทตั้งกรณี  $k$  จะมีเซตจำกัด  $S_{x_1} \subseteq \mathbb{N}_0^k$  ซึ่ง  $\sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$  ดังนั้นจึงมีเซตจำกัด

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1} \end{array} \right\}$$

$$\text{ซึ่ง } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$$

2. กรณี  $\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$  ลู่เข้า

ทุก  $x_j \in \mathbb{N}_0$

กำหนดให้

$$B(x_j) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ทุก } x_j \in \mathbb{N}_0$$

ให้จำนวนจริง  $\alpha > 0$  เนื่องจาก  $\sum_{x_j=0}^{\infty} B(x_j)$  ลู่ออก และ  $B(x_j) \geq 0$  ทุก  $x_j \in \mathbb{N}_0$  โดยบทตั้ง 2.2 จะมี

จำนวนเต็ม  $N > 0$  ที่ทำให้  $\sum_{x_1=0}^N B(x_1) > \alpha + 1$

เนื่องจาก  $B(x_1) - \frac{1}{N} < B(x_1)$

$$= \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ทุก } x_j \in \mathbb{N}_0$$

เมื่อใช้บทตั้ง 2.3 กับอนุกรม

$$\sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \text{ ทุกค่า } x_j \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่า แต่ละ  $x_j \in \mathbb{N}_0$  จะมีเซตจำกัด  $S_{x_j} \subseteq \mathbb{N}_0^k$

$$\text{ซึ่ง } \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > B(x_1) - \frac{1}{N}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{x_1=0}^N \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \sum_{x_1=0}^N B(x_1) - 1 > \alpha + 1 - 1 = \alpha$$

เพราะฉะนั้น จึงมีเซตจำกัด

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \\ 0 \leq x_1 \leq N, (x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1} \end{array} \right\}$$

$$\text{ซึ่ง } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{x_1=0}^N \sum_{(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \in S_{x_1}} A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) > \alpha$$

□

นอกจากความรู้พื้นฐานที่กล่าวมาข้างต้น ผู้อ่านจะต้องอาศัยความรู้เรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) และ ทฤษฎีบททวินามติดลบ (negative binomial theorem) ซึ่งสามารถทบทวนได้ที่ (Beeler, 2015), (Chuan-Chong & Khee-Meng, 1992) หรือเอกสารทั่วไปเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เชิงการจัด เพื่อใช้ประกอบการศึกษาหัวข้อถัดไป

### การจัดเรียงใหม่ให้เป็นหนึ่งมิติ

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า  $\mathbb{N}_0^k$  เป็น เซตนับได้ (countable set) นั่นคือ เราสามารถนำสมาชิกทั้งหมดใน  $\mathbb{N}_0^k$  ซึ่งอยู่ในปริภูมิ  $k$  มิติ มาเรียงลำดับใหม่เป็นแนวตรงได้ ดังนั้นเราอาจลดทอนอนุกรมอนันต์ที่ซ้อนกัน  $k$  ชั้นให้เหลือเพียงอนุกรมอนันต์ชั้นเดียวโดยสร้างกฎเกณฑ์สำหรับเรียงลำดับแต่ละพจน์ที่ปรากฏในผลบวก  $k$  มิติให้เป็นผลบวกแนวตรงซึ่งมีหนึ่งมิติ อย่างไรก็ตาม กระบวนการนี้อาจส่งผลกระทบต่อ การลู่เข้าหรือค่าของอนุกรม ทฤษฎีบทที่จะพิสูจน์ในหัวข้อนี้ช่วยยืนยันได้ว่า ในกรณีที่แต่ละพจน์ของอนุกรมเป็นค่าจริงที่ไม่เป็นลบและในกรณีที่อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ กระบวนการดังกล่าวจะไม่ทำให้การลู่เข้าหรือค่าของอนุกรมเปลี่ยนแปลง

**ทฤษฎีบท 3.1** ให้  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,

และ  $\phi : \mathbb{N}_0 \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}_0^k$  ถ้า  $A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$

ทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$  แล้ว จะได้ว่า

ก.  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  **ลู่เข้า**

ก็ต่อเมื่อ  $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$  **ลู่เข้า**

ข. ถ้า  $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$  **ลู่เข้า** แล้ว

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

**บทพิสูจน์ ก.**

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์สมมูลกับ

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ ลู่ออก ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \text{ ลู่ออก}$$

( $\Rightarrow$ ) สมมติให้  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$

ลู่ออก จากบทตั้ง 2.4 จะได้ว่า

ทุกจำนวนจริง  $\alpha > 0$  จะมีเซตจำกัด  $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$  ซึ่ง

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$$

เนื่องจาก  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$

เป็นผลบวกจำกัด ซึ่งทุกพจน์ปรากฏใน  $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$

โดยที่  $A(\phi(n)) \geq 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$  จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า  $\alpha > 0$  ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \text{ ลู่ออก}$$

( $\Leftarrow$ ) สมมติให้  $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$  **ลู่ออก** จากบทตั้ง

2.2 จะได้ว่า ทุกจำนวนจริง  $\alpha > 0$  จะมีจำนวนเต็ม  $N > 0$

ซึ่ง  $\sum_{n=0}^N A(\phi(n)) > \alpha$

เนื่องจาก  $\sum_{n=0}^N A(\phi(n))$  เป็นผลบวกจำกัด ซึ่ง

ทุกพจน์ปรากฏใน  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  โดยที่

$$A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0 \text{ ทุก } (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$$

จะได้ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq \sum_{n=0}^N A(\phi(n)) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า  $\alpha > 0$  ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ ลู่ออก}$$

**บทพิสูจน์ ข.**

จากข้อ ก. เมื่อ  $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$  **ลู่เข้า**

จะได้  $\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  **ลู่เข้าด้วย**

ต่อไปจะพิสูจน์ 2 ส่วน ดังนี้

1. พิสูจน์ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

ให้  $\alpha$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\alpha < \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$

จากบทตั้ง 2.1 จะมีจำนวนเต็ม  $N > 0$  ที่ทำให้

$$\sum_{n=0}^N A(\phi(n)) > \alpha \text{ ดังนั้น}$$

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq \sum_{n=0}^N A(\phi(n)) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า  $\alpha$  ซึ่ง  $\alpha < \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

2. พิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

ให้  $\alpha$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

จากบทตั้ง 2.3 จะมีเซตจำกัด  $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$

ซึ่ง  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$

ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in S} A(x_1, x_2, \dots, x_k) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า  $\alpha$  ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นอีกเงื่อนไขหนึ่งซึ่งสามารถใช้สำหรับอนุกรมที่มีบางพจน์เป็นจำนวนจริงที่ติดลบหรือเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

**ทฤษฎีบท 3.2** ให้  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{C}$  และ

$\phi: \mathbb{N}_0 \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}_0^k$  ถ้า  $\sum_{n=0}^{\infty} |A(\phi(n))|$  ลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

**บทพิสูจน์**

สำหรับทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

ให้  $R(x_1, x_2, \dots, x_k)$  แทน ส่วนจริง (real part) ของ  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  เราทราบว่า  $\sum_{n=0}^{\infty} |A(\phi(n))|$  ลู่เข้า และ

$$|A(\phi(n))| \geq |R(\phi(n))| \geq 0 \text{ ทุก } n \in \mathbb{N}_0$$

จะได้  $\sum_{n=0}^{\infty} |R(\phi(n))|$  ลู่เข้า โดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (comparison test)

เนื่องจาก  $\sum_{n=0}^{\infty} 2|R(\phi(n))|$  ลู่เข้า และ

$$2|R(\phi(n))| \geq |R(\phi(n))| - R(\phi(n)) \geq 0$$

ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$  จะได้  $\sum_{n=0}^{\infty} (|R(\phi(n))| - R(\phi(n)))$

ลู่เข้า โดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ เช่นกัน

เห็นได้ชัดว่า  $|R(x_1, x_2, \dots, x_k)| \geq 0$

ทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} |R(x_1, x_2, \dots, x_k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |R(\phi(n))| \tag{1}$$

นอกจากนี้

$$|R(x_1, x_2, \dots, x_k)| - R(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

ทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} (|R(x_1, x_2, \dots, x_k)| - R(x_1, x_2, \dots, x_k)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (|R(\phi(n))| - R(\phi(n))) \end{aligned} \tag{2}$$

นำสมการ (1) ลบด้วยสมการ (2) จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} R(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\phi(n)) \tag{3}$$

สำหรับทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

ให้  $I(x_1, x_2, \dots, x_k)$  แทน ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$  จะสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ (3) ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} I(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} I(\phi(n)) \tag{4}$$

จากสมการ (3) และ (4) เราจะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

□

**สูตรลดทอน**

ผลลัพธ์จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้เราได้สูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.1** ให้  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R}$  และ

$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  นอกจากนี้ กำหนดให้

$$A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid x_1 + x_2 + \dots + x_k = n\}$$

สำหรับทุก  $n \in \mathbb{N}_0$

ถ้า  $g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \geq 0$

ทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$  แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

**บทพิสูจน์**

เนื่องจาก  $A_n$  เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$  ดังนั้น จะมีฟังก์ชัน

$$\theta_n: \{0, 1, 2, \dots, a_n - 1\} \xrightarrow{1-1} A_n \text{ ทุกค่า } n \in \mathbb{N}_0$$

โดยที่จำนวนเต็ม  $a_n \geq 1$  แทนจำนวนสมาชิกของ  $A_n$  ซึ่งจะเห็นว่า  $a_0 = 1$  และ  $\theta_0(0) = (0, 0, \dots, 0)$

ให้  $b_n = \sum_{r=0}^n a_r$  ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$  จะได้ว่า  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  เป็น

ลำดับเพิ่มบน  $\mathbb{N}$  ดังนั้น ทุก  $n \in \mathbb{N}$  จะมี  $s_n \in \mathbb{N}_0$  เพียงค่าเดียวซึ่ง  $b_{s_n} \leq n < b_{s_n+1}$  นั่นคือ  $n - b_{s_n} \in \{0, 1, 2, \dots, a_{s_n+1} - 1\}$

เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชัน  $\phi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  โดย

$$\phi(n) = \begin{cases} \theta_{s_n+1}(n - b_{s_n}) & ; n \in \mathbb{N} \\ (0, 0, \dots, 0) & ; n = 0 \end{cases}$$

กล่าวคือ ฟังก์ชัน  $\phi$  เป็นการเรียงสมาชิกทั้งหมดของ  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  โดยเริ่มจากสมาชิกของ  $A_0$  ตามด้วยสมาชิกของ  $A_1$  ตามด้วยสมาชิกของ  $A_2$  และเป็นเช่นนี้เรื่อยไปตามลำดับ นอกจากนี้  $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$  เป็นผลแบ่งกัน (partition)

ของ  $\mathbb{N}_0^k$  ทำให้สรุปได้ว่า  $\phi: \mathbb{N}_0 \xrightarrow[\text{onto}]{} \mathbb{N}_0^k$

ต่อไป นิยามฟังก์ชัน

$$h: \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ โดย}$$

$$h(x_1, x_2, \dots, x_k) = g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

ทุก  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จะเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(\phi(n)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} h(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} g(x_1, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + \dots + x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(n) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} h(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(\phi(n))$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} g(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f(n) \end{aligned}$$

□

**หมายเหตุ** ถ้าอนุกรมด้านใดด้านหนึ่งของสมการ (4.1) ลู่ออก แล้วอนุกรมอีกด้านจะลู่ออกด้วย

สูตรลดทอนที่เราได้สำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.2) คือทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 4.2** ให้  $k \in \mathbb{N}$  และ  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ถ้า  $f(n) \geq 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$  แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{ก. } \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} f(n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \text{ข. } \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_k \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{2k-1} f(n) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \text{ค. } \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \dots x_k)^2 \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1} f(n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

**บทพิสูจน์ ก.**

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} 1 \cdot f(n) \end{aligned}$$

สังเกตว่า  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} 1$

คือสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  จากการกระจายฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$F(z) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} z^m \right)^k = (1 + z + z^2 + \dots)^k$$

ในขณะที่เดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$$

ดังนั้น สามารถเขียน  $F(z)$  ได้อีกแบบคือ

$$F(z) = \left( \frac{1}{1-z} \right)^k = (1-z)^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} z^m \quad ; \text{ ทฤษฎีบททวินาม}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  ใน  $F(z)$  จะได้

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} 1 = \binom{n+k-1}{k-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} f(n)$$

**บทพิสูจน์ ข.**

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_k \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} x_1 x_2 \dots x_k \cdot f(n)$$

สังเกตว่า  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} x_1 x_2 \dots x_k$

คือสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  จากการกระจายฟังก์ชันก่อนกำหนด

$$F(z) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} m z^m \right)^k = (z + 2z^2 + 3z^3 + \dots)^k$$

ในขณะที่เดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} m z^m = \frac{z}{(1-z)^2}$$

ดังนั้น สามารถเขียน  $F(z)$  ได้อีกแบบคือ

$$F(z) = \left( \frac{z}{(1-z)^2} \right)^k = z^k (1-z)^{-2k} = z^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+2k-1}{2k-1} z^m \quad ; \text{ ทฤษฎีบททวินาม}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+2k-1}{2k-1} z^{m+k}$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} \binom{m+2k-1}{2k-1} z^{m+k} \quad ;$$

$$\binom{m+2k-1}{2k-1} = 0 \text{ เมื่อ } -k \leq m < 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{2k-1} z^m$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  ใน  $F(z)$  จะได้

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} x_1 x_2 \dots x_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_k \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{2k-1} f(n)$$

**บทพิสูจน์ ค.**

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \dots x_k)^2 \cdot f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} (x_1 x_2 \dots x_k)^2 \cdot f(n)$$

สังเกตว่า  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} (x_1 x_2 \dots x_k)^2$

คือสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  จากการกระจายฟังก์ชันก่อนกำหนด

$$F(z) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} m^2 z^m \right)^k = (z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \dots)^k$$



ในขณะเดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 z^m = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

ดังนั้นสามารถเขียน  $F(z)$  ได้อีกแบบคือ

$$\begin{aligned} F(z) &= \left( \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \right)^k = z^k (1+z)^k (1-z)^{-3k} \\ &= z^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} z^r \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^m \end{aligned}$$

; ทฤษฎีบททวินาม

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^{m+r+k} \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{m=-r-k}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^{m+r+k}; \end{aligned}$$

$$\binom{m+3k-1}{3k-1} = 0 \text{ เมื่อ } 0 \leq r \leq k, -r-k \leq m < 0$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+2k-r-1}{3k-1} z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{m+2k-r-1}{3k-1} z^m \end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ  $z^n$  ใน  $F(z)$  จะได้

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^2 = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} &\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \cdots x_k)^2 \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1} f(n) \quad \square \end{aligned}$$

**หมายเหตุ** ถ้าอนุกรมด้านใดด้านหนึ่งของสมการ (4.2), (4.3) และ (4.4) ลู่ออก แล้วอนุกรมอีกด้านจะลู่ออกด้วย

### ตัวอย่างการประยุกต์

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างการคำนวณค่าของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นโดยประยุกต์ทฤษฎีบท 4.2 เพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นภาพการใช้งานพอสังเขป

### ตัวอย่าง 5.1

หาค่าของอนุกรม 
$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!}$$

วิธีทำ

ให้  $f(n) = \frac{1}{n!}$  จะได้  $f(n) \geq 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}_0$ .

จากทฤษฎีบท 4.2 (ก) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!} \end{aligned}$$

เราทราบว่า  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  นั่นคือ  $x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$  ทุก  $x \in \mathbb{R}$  และเนื่องจากอนุกรมกำลังสามารถหาอนุพันธ์ได้เทอมต่อเทอม ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ  $x^2 e^x$  ที่  $x = 1$  คือ

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^x) \Big|_{x=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x^{n+2}}{n!} \right) \Big|_{x=1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!} \end{aligned}$$

แต่จะเห็นว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^x) \Big|_{x=1} = (x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x) \Big|_{x=1} = 7e$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^x) \Big|_{x=1} = \frac{7e}{2} \quad \square$$

### ตัวอย่าง 5.2

หาค่าของอนุกรม

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{xyz}{(x+y+z)!}$$

วิธีทำ

โดยวิธีเดียวกับตัวอย่าง 5.1 และทฤษฎีบท 4.2 (ข)

จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{xyz}{(x+y+z)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{5} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{5!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{n!} \\ &= \frac{1}{120} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^5}{dx^5} \left( \frac{x^{n+2}}{n!} \right) \Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{1}{120} \frac{d^5}{dx^5} (x^2 e^x) \Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{31e}{120} \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 5.3**

หาค่าของอนุกรม

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(xyz)^2}{(x+y+z)!}$$

□

**วิธีทำ**

โดยวิธีเดียวกับตัวอย่าง 5.1 และทฤษฎีบท 4.2 (ค) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(xyz)^2}{(x+y+z)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^3 \binom{3}{r} \binom{n+5-r}{8} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \binom{n+5}{8} + 3 \binom{n+4}{8} + 3 \binom{n+3}{8} + \binom{n+2}{8} \right) \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{8!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^8}{dx^8} \left( \frac{x^{n+5} + 3x^{n+4} + 3x^{n+3} + x^{n+2}}{n!} \right) \Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{1}{8!} \frac{d^8}{dx^8} ((x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2)e^x) \Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{773e}{1008} \end{aligned}$$

□

**สรุปผลการวิจัย**

ในบทความนี้ เราได้สร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) และ (1.2) โดยมีแนวคิดคือการจัดเรียงแต่ละพจน์ของอนุกรมหลายชั้นใหม่ให้เป็นผลบวกแนวตรง เราเริ่มจากการพิสูจน์เงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้วิธีจัดเรียงดังกล่าวไม่เปลี่ยนแปลงการลู่เข้าหรือค่าของอนุกรม นั่นคือ ทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 โดยอาศัยเพียงความรู้พื้นฐานของอนุกรมชั้นเดียวในการพิสูจน์ จากนั้นจึงเลือกกฎเกณฑ์ที่เหมาะสมในการเรียงลำดับและจัดกลุ่ม เพื่อสร้างสูตรลดทอนทั่วไปสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) นั่นคือ ทฤษฎีบท 4.1 และเมื่อใช้สูตรลดทอนทั่วไปพร้อมกับเทคนิคการนับด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิด จะทำให้ได้สูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.2) นั่นคือ ทฤษฎีบท 4.2 ผลลัพธ์ที่เราได้ในบทความนี้ นอกจากจะช่วยให้คำนวณค่าแฉ่งชัดของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นได้ง่ายขึ้นแล้ว ยังอาจนำไปประยุกต์กับ อนุกรมกำลังรูปนัย (formal power series) ที่มีหลายตัวแปรบางรูปแบบ ผู้สนใจสามารถดูรายละเอียดเกี่ยวกับอนุกรมกำลังรูปนัยได้ที่ (Haukkanen, 2019) และ (Niven, 1969)

**References**

Beeler, R. A. (2015). *How to count: An introduction to combinatorics and its applications*. Springer Cham.

Chuan-Chong, C., & Khee-Meng, K. (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific Publishing Company.

Furdui, O., & Trif, T. (2011). On the summation of certain iterated series. *Journal of Integer Sequence*, 14(6), Article 11.6.1.

Furdui, O. (2013). *Limits, series, and fractional part integrals: Problems in mathematical analysis*. Springer.

Haukkanen, P. (2019). Formal power series in several variables. *Notes on Number Theory and Discrete Math*, 25(4), 44-57.

Niven, I. (1969). Formal power series. *The American Mathematical Monthly*, 76(8), 871-889.

Qin, H., & Furdui, O. (2015). Three open problems and a conjecture. *Open Mathematic Journal*, 13(1), 729-736.