สมบัติของพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

The properties of area of a Nine-Point Circle of an Archimedes' Triangle

ภิญโญ มนูศิลป์[1*], ยุพร ริมชลการ[2]

Pinyo Manoosilp[1*], Yuporn Rimcholakarn[2]

Received: 17 March 2017 ; Accepted: 24 August 2017

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่วงกลมเก้าจุดกับพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ผลจากการศึกษาพบว่าพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์เท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

คำสำคัญ : วงกลมเก้าจุด รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์

Abstract

This study reports the relationship between the area of a Nine-Point Circle and the area of the circumscribed circle of an Archimedes' triangle and also the relationship between the area of Euler triangle and the area of an Archimedes' triangle. The results were: the area of a Nine-Point Circle of an Archimedes' triangle is 1/4 times the area of the circumscribed circle of an Archimedes' triangle and the area of Euler triangle is 1/4 times the area of an Archimedes' triangle.

Keywords: Nine-Point Circle, Archimedes' triangle, Euler triangle

บทนำ

วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมถูกค้นพบโดย Leonhard Euler (1707-1783) ในปี ค.ศ. 1765 และได้ถูกศึกษาเพิ่มเติมโดย Karl Feuerbach (1800-1834) เป็นวงกลมที่มีเส้นรอบวงลากผ่านจุดเก้าจุด คือจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมสามจุด จุดที่เกิดจากเส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดมุมมาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยมสามจุดและจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์ถึงจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมอีกสามจุด[1, 2]

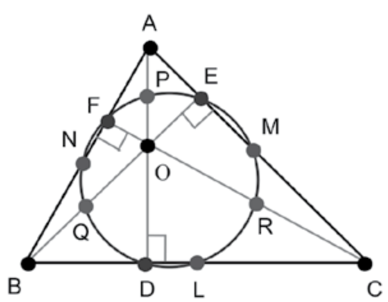


Figure 1 Nine-Point Circle of Triangle

[1] *รองศาสตราจารย์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย อำเภอเมือง จังหวัดเลย 42000*

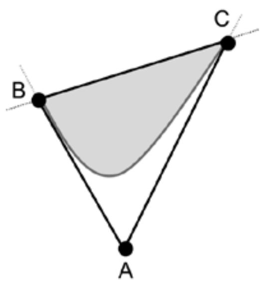
[2] *รองศาสตราจารย์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000*

[1] *Assoc. Prof., Faculty of Science and Technology Loei Rajabhat University, Loei 42000, Thailand.*

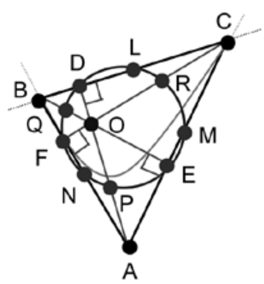
[2] *Assoc. Prof., Faculty of Science and Technology Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000, Thailand.*

[*] *Corresponding author; Pinyo Manoosilp Faculty of Science and Technology Loei Rajabhat University, Loei 42000, Thailand. e-mail : manoosilp@yahoo.co.th*

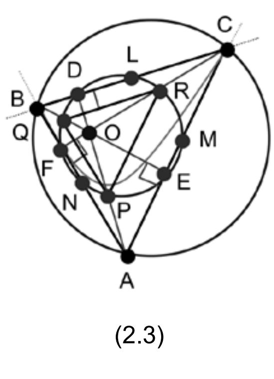
Archimedes (287-212 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้สร้างเซกเมนต์พาราโบลาอันเป็นอาณาบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดบนโค้งพาราโบลานั้นอีกทั้งได้กำหนดรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสขึ้นโดยเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาและมีด้านสองด้านเป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด[9] เรียกชื่อวงกลมซึ่งมีเส้นรอบวงผ่านจุดทั้งเก้าของรูปสามเหลี่ยมนี้ว่าวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส



(2.1)



(2.2)



(2.3)

Figure 2 Nine-Point Circle of Archimedes' Triangle

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC มีฐานเป็นคอร์ด BC ของเซกเมนต์พาราโบลา โดยที่ด้าน AB และ AC เป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุด B และ C (Figure 2.1) วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสคือวงกลมซึ่งมีเส้นรอบวงผ่านจุด D, L, R, M, E, P, F, N และ Q (Figure 2.2) โดยภาพที่ 2.3 เป็นการแสดงถึงวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC และรูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ PQR

การอยู่ร่วมกันของจุดทั้งเก้าบนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกันได้รับการพิสูจน์ไว้อย่างน่าสนใจ[1, 3, 6, 8] ด้วยเหตุที่วงกลมเก้าจุดและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีโครงสร้างที่สัมพันธ์กันดังนั้นการศึกษาครั้งนี้จึงมุ่งค้นหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับสมบัติเชิงพื้นที่ระหว่างวงกลมเก้าจุด วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ ทั้งนี้เพื่อเป็นการขยายขอบเขตความรู้ให้กว้างขวางและลึกซึ้งยิ่งขึ้น

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่วงกลมเก้าจุดกับพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส และความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

วิธีการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาถึงสมบัติเกี่ยวกับพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์และรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยศึกษาเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ในระบบพิกัดฉาก

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

บทนิยาม 1 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Parabolic Segment) หมายถึงอาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น

บทนิยาม 2 รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Triangle) หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและมีด้านสองด้านเป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด[9]

เซกเมนต์พาราโบลา ABC เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกับโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด B และ C ตามลำดับ รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC มีคอร์ด BC เป็นฐาน มีด้าน AB และ AC ซึ่งเกิดจากเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุด B และ C ตามลำดับลากมาตัดกันที่จุด A

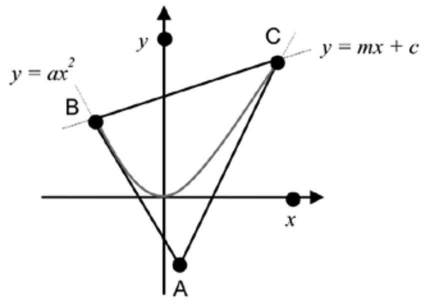


Figure 3 Co-ordinate of Archimedes' Triangle

ต้องการหา พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

การหาพิกัดของจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

เนื่องจาก จุด B และ C เป็นจุดตัดของพาราโบลา $y = ax^2$ และ เส้นตรง $y = mx + c$

จะได้ พิกัดของ จุด C คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของ จุด B คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

เนื่องจาก เส้นตรง AB และ AC เป็นเส้นสัมผัสกับ พาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด B และ C

ความชันของเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลา คือ $\frac{d(y)}{dx} = 2ax$

ความชันของเส้นตรง AB $= 2a\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$

$= m-\sqrt{m^2+4ac}$

ความชันของเส้นตรง AC $= 2a\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$

$= m+\sqrt{m^2+4ac}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง AB คือ

$$y-\left(\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)=\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(x-\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$y=\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)x+\left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}-m^2-2ac}{2a}\right) \qquad \text{----------------------- (1)}$$

สมการของเส้นตรง AC คือ

$$y-\left(\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)=\left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(x-\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$y=\left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)x-\left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right) \qquad \text{----------------------- (2)}$$

พิกัดจุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง AB และ AC หาได้จาก (1) – (2) ดังนี้

$$2(\sqrt{m^2+4ac})x = \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}-m^2-2ac}{2a}\right)+\left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$
$$x = \frac{m}{2a}$$

แทนค่า x ใน (1) จะได้

$$y=\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(\frac{m}{2a}\right)+\left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}-m^2-2ac}{2a}\right)$$
$$y=-c$$

จะได้ว่า พิกัดของ จุด A คือ $\left(\frac{m}{2a},-c\right)$

การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

ให้ Ω แทน พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC สามารถหาพื้นที่ได้จากพิกัดของจุดยอดมุมทั้งสาม ดังนี้

จะได้
$$\Omega = \left(\frac{1}{2}\right)\left|\begin{array}{cc} \frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \\ \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \\ \frac{m}{2a} & -c \\ \frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{m^3-2acm-(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}\right]-\left[\frac{m^3-2acm+(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}\right]\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{-2(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}\right]\right|$$
$$= \frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}$$ = ตารางหน่วย

นั่นคือ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เท่ากับ $\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}$ ตารางหน่วย

พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

บทนิยาม 3 จุดศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยม (Circumcenter of Triangle) หมายถึง จุดตัดของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉาก (Perpendicular Bisectors) กับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนั้น[4]

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เกิดจาก เส้นตรง $y = mx + c$ ตัด โค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด B และ C มีคอร์ด AB เป็นฐานโดยที่ด้าน AB และ AC เป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุด B และ C ตัดกันที่จุด A ให้จุด S, U และ V เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับ

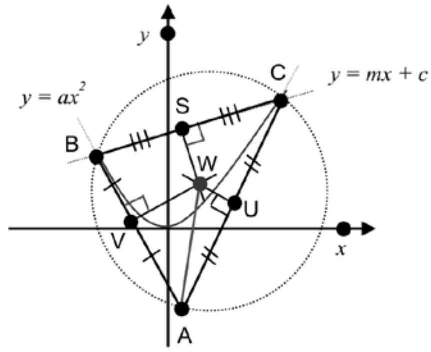


Figure 4 Circumcenter and Radius of Circumcircle of Archimedes' Triangle

ต้องการหา พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

การหาพิกัดของจุดศูนย์กลางวงล้อมรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

ลากเส้นตั้งฉากจากจุด V และ U ตัดกันที่จุด W ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางวงล้อมรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC สามารถหาพิกัดได้ ดังนี้

เนื่องจาก พิกัดของจุด B คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของจุด A คือ $\left(\frac{m}{2a}, -c\right)$

พิกัดของจุด V ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB หาได้จาก

$$x = \frac{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\frac{m}{2a}}{2} = \frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

$$y = \frac{\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+(-c)}{2} = \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของจุด V คือ $\left(\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right)$

จะได้ ความชันของเส้นตรง AB $= \dfrac{\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}-(-c)}{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}-\frac{m}{2a}}$

$$= m-\sqrt{m^2+4ac}$$

เพราะว่า เส้นตรง VW ตั้งฉากกับเส้นตรง AB จะได้ ความชันของเส้นตรง VW = $-\left(\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right)$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง VW คือ

$$y-\left[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]=-\left[\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]\left[x-\left(\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right)\right]$$

$$y=\left[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]-\left[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)(4a)}\right] \qquad \text{---------------} (3)$$

พิกัดของจุด U ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC หาได้จาก

$$x = \frac{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}+\frac{m}{2a}}{2} = \frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

$$y = \frac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}+(-c)}{2} = \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของจุด U คือ $\left(\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{4a},\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right)$

เนื่องจาก พิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a},\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของจุด A คือ $\left(\frac{m}{2a},-c\right)$

จะได้ ความชันของเส้นตรง AC

$$= \frac{\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}-(-c)}{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}-\frac{m}{2a}} = m+\sqrt{m^2+4ac}$$

เนื่องจาก เส้นตรง UW ตั้งฉากกับเส้นตรง AC จะได้ ความชันของเส้นตรง UW = $-\left(\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right)$
ดังนั้นสมการเส้นตรง UW คือ

$$y-\left[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]=-\left[\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right]\left[x-\left(\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right)\right]$$

$$y=\left[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]-\left[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{2m+\sqrt{m^2+4ac}}{\left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)(4a)}\right] \qquad \text{-----------------} (4)$$

พิกัดของจุด W ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง VW และ UW หาได้จาก (3) – (4)

$$\left(\frac{-2\sqrt{m^2+4ac}}{-4ac}\right)x=\left[\frac{2m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]+\left[\frac{-4m\sqrt{m^2+4ac}+2m\sqrt{m^2+4ac}}{\left(m^2-m^2-4ac\right)(4a)}\right]$$

$$x = \frac{4acm+m}{4a}$$

แทนค่า *x* ใน (3) จะได้

$$y=\left[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}}{4a}\right]-\left[\frac{\frac{4acm+m}{4a}}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{2m-\sqrt{m^2+4ac}}{\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)(4ac)}\right]$$
$$=\frac{2m^2+1}{4a}$$

จะได้ พิกัดของ จุด W คือ $\left(\frac{4acm+m}{4a},\frac{2m^2+1}{4a}\right)$

การหาความยาวของรัศมีวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

เนื่องจากเส้นตรง AW เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC ความยาวของรัศมี AW สามารถหาได้ ดังนี้

$$|AW| = \sqrt{\left[\left(\frac{4acm+m}{4a}\right)-\left(\frac{m}{2a}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{2m^2+1}{4a}\right)-(-c)\right]^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{16a^2}} \text{ หน่วย}$$

การหาพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

ให้ G แทน พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

$$G = (\pi)\left[\sqrt{\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{16a^2}}\right]^2$$
$$= (\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{16a^2}\right) \text{ ตารางหน่วย}$$

นั่นคือ พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เท่ากับ

$$(\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{16a^2}\right) \text{ ตารางหน่วย}$$

จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม 4 จุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม (Orthocenter of Triangle) หมายถึง จุดตัดของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดมุมมาตั้งฉากกับด้านตรงข้าม (Altitude) ทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม[4]

การหาพิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด B และC โดยมีคอร์ด BC เป็นฐานและจุด A เป็นจุดยอด ให้จุด O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง AD, BE และ CF ซึ่งเป็นเส้นที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับด้าน BC, AC และ AB ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ

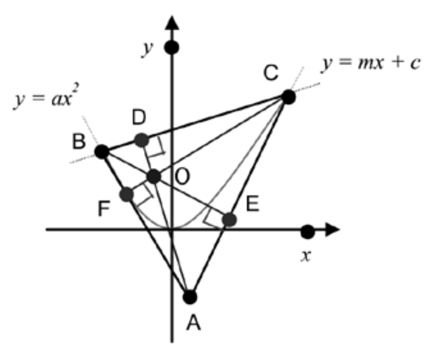


Figure 5 Orthocenter of Archimedes' Triangle

ต้องการหา พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เนื่องจาก เส้นตรง AC มีความชันเท่ากับ $m+\sqrt{m^2+4ac}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง BE ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง AC เท่ากับ $-\left(\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right)$

เนื่องจาก พิกัดของ จุด B คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a},\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

จะได้ สมการของเส้นตรง BE คือ

$$y-\left[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right]=-\left[\frac{1}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right]\left[x-\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$y=\left[\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right]-\left[\frac{x}{m+\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)\left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)}\right] \quad \text{-------- (5)}$$

เนื่องจาก เส้นตรง AB มีความชันเท่ากับ $m-\sqrt{m^2+4ac}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง CF ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง AB เท่ากับ $-\left(\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right)$

เนื่องจาก พิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a},\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

จะได้ สมการของเส้นตรง CF คือ

$$y-\left[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right]=-\left[\frac{1}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]\left[x-\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$y=\left[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right]-\left[\frac{x}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)\left(m-\sqrt{m^2+4ac}\right)}\right] \quad \text{------- (6)}$$

พิกัดของจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง BE และ CF หาได้จาก (6) – (5) ดังนี้

$$\left(\frac{-2\sqrt{m^2+4ac}}{-4ac}\right)x=\left[\frac{-2m\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right]+\left[\frac{-4m\sqrt{m^2+4ac}}{\left(-8a^2c\right)}\right]$$

$$x=\frac{m-2acm}{a}$$

แทนค่า *x* ใน (6) จะได้

$$y=\left[\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right]-\left[\frac{\frac{m-2ac}{a}}{m-\sqrt{m^2+4ac}}\right]+\left[\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{(2a)\left(m-\sqrt{m+4ac}\right)}\right]$$

$$=\frac{(m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac)(m-\sqrt{m^2+4ac})-2(m-2acm)+(m+\sqrt{m^2+4ac})}{(2a)(m-\sqrt{m^2+4ac})}$$

$$=\frac{2ac-1}{2a}$$

จะได้ พิกัดของจุด O คือ $\left(\frac{m-2acm}{a},\frac{2ac-1}{2a}\right)$

นั่นคือ พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC อยู่ที่ O $\left(\frac{m-2acm}{a},\frac{2ac-1}{2a}\right)$

การหาพิกัดของจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

เส้นตรง $y = mx + c$ ตัดโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ที่จุด B และC ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC ซึ่งมีคอร์ด BC เป็นฐานและมีจุด A เป็นจุดยอด โดยมีจุด O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ ให้จุด P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างเส้นตรง AO, BO และ CO ตามลำดับ

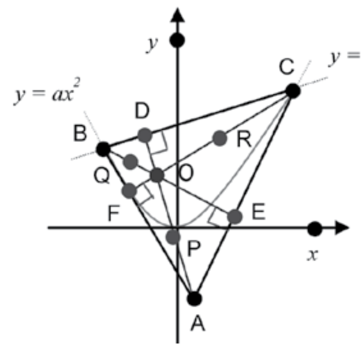


Figure 6 Mid-point between Orthocenter and Vertex of Archimedes' Triangle

ต้องการหา พิกัดจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เนื่องจาก พิกัดของจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC คือ O $\left(\frac{m-2acm}{a},\frac{2ac-1}{2a}\right)$

พิกัดของจุด P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ O หาได้จาก

$$x = \frac{\frac{m}{2a}+\frac{m-2acm}{a}}{2} = \frac{3m-4acm}{4a}$$

$$y = \frac{(-c)+\frac{2ac-1}{2a}}{2} = -\frac{1}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของ จุด P คือ $\left(\frac{3m-4acm}{4a},-\frac{1}{4a}\right)$ และด้วยวิธีการเช่นเดียวกันจะได้

พิกัดของจุด Q ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด B และ O คือ $\left(\frac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a},\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)$

พิกัดของจุด R ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด C และ O คือ $\left(\frac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a},\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)$

นั่นคือ พิกัดของจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC อยู่ที่ P $\left(\frac{3m-4acm}{4a},-\frac{1}{4a}\right)$

Q $\left(\frac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a},\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)$

R $\left(\frac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a},\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)$

วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสกับรูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์

บทนิยาม 5 วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยม (Nine-Point Circle of Triangle) หมายถึง วงกลมที่มีเส้นรอบวงลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดที่เกิดจากเส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดมุมมาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามทั้งสามและจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

บทนิยาม 6 วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Nine-Point Circle of Archimedes' Triangle) หมายถึง วงกลมที่มีเส้นรอบวงลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดที่เกิดจากเส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดมุมมาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามทั้งสามและจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

บทนิยาม 7 รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ (Euler Triangle) หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส[10]

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์

วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC มีเส้นรอบวงผ่านจุด D, L, R, M, E, P, F, N และ Q ตามลำดับ ให้รูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด P, Q และR ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC

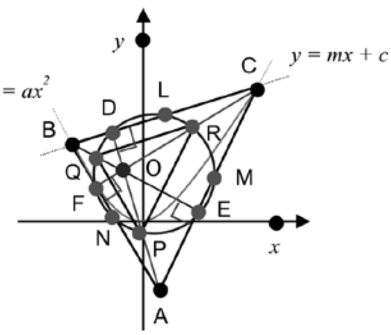


Figure 7 Nine-Point Circle of Archimedes' Triangle and Euler Triangle

ต้องการหา พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ PQR

ให้ δ แทน พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ PQR สามารถหาพื้นที่จากพิกัดของจุดยอดมุมทั้งสามได้ ดังนี้

จะได้ $$\delta = \left(\frac{1}{2}\right)\left|\begin{array}{cc} \dfrac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a} & \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a} \\ \dfrac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a} & \dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a} \\ \dfrac{3m-4acm}{4a} & -\dfrac{1}{4a} \\ \dfrac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a} & \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{l} \left[\dfrac{5m^3-9m+32acm-8acm^3-32a^2c^2m^2-(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{16a^2}\right] \\ -\left[\dfrac{5m^3-9m+32acm-8acm^3-32a^2c^2m^2+(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{16a^2}\right] \end{array}\right|$$

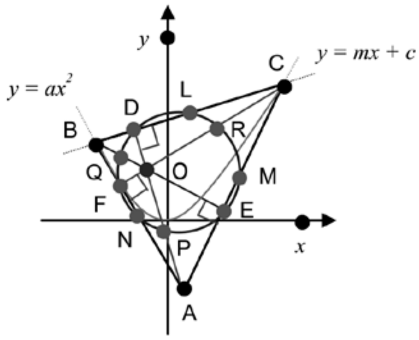
$$= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{-2(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{16a^2}\right]\right|$$ = ตารางหน่วย

นั่นคือ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ PQR เท่ากับ $\dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{16a^2}$ ตารางหน่วย

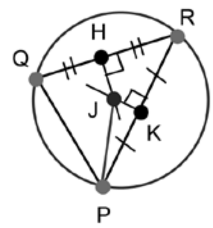
พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

การหาพิกัดของจุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

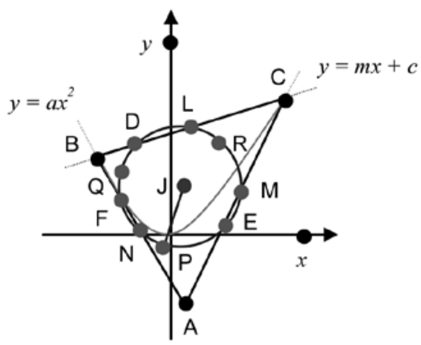
วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC มีเส้นรอบวงผ่านจุด D, L, R, M, E, P, N, F และ Q ตามลำดับ เมื่อจุด L, M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, AC และ AB โดยที่จุด D, E และ F เป็นจุดที่เกิดจากเส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC มาตั้งฉากกับด้าน BC, AC และ AB มีจุด O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ และให้จุด P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของระยะ AO, BO และ CO ตามลำดับ (Figure 8.1)



(8.1)



(8.2)



(8.3)

Figure 8 Area of Nine-Point Circle of Archimedes' Triangle

ต้องการหา พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

การหาพิกัดของจุดศูนย์กลางวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

สร้างรูปสามเหลี่ยม PQR แนบในวงกลมเก้าจุด ลากเส้นตั้งฉากจากจุด H และ K ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน QR และ PR ตามลำดับให้ตัดกันที่จุด J (Figure 8.2)

พิกัดของจุด H ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด Q และ R หาได้จาก

$$x = \frac{\frac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a}+\frac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a}}{2}$$

$$= \frac{3m-4acm}{4a}$$

$$y = \frac{\frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}+\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}}{2}$$

$$= \frac{m^2+4ac-1}{4a}$$

ดังนั้น พิกัดของจุด H คือ $\left(\frac{3m-4acm}{4a},\frac{m^2+4ac-1}{4a}\right)$

ความชันของเส้นตรง QR $= \dfrac{\left(\dfrac{m^2 - m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)-\left(\dfrac{m^2 + m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)}{\left(\dfrac{3m-\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a}\right)-\left(\dfrac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a}\right)}$

$= m$

เนื่องจาก เส้นตรง HJ ตั้งฉากกับเส้นตรง QR ดังนั้น ความชันของเส้นตรง HJ $= -\dfrac{1}{m}$

จะได้ สมการเส้นตรง HJ คือ $y-\left(\dfrac{m^2+4ac-1}{4a}\right)=-\dfrac{1}{m}\left[x-\left(\dfrac{3m-4acm}{4a}\right)\right]$ ------------------------ (7)

$$y=-\frac{x}{m}+\left(\frac{m^2+2}{4a}\right)$$

พิกัดของจุด K ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ R หาได้จาก $x = \dfrac{\dfrac{3m+\sqrt{m^2+4ac}-4acm}{4a}+\dfrac{3m-4acm}{4a}}{2}$

$$= \frac{6m+\sqrt{m^2+4ac}-8acm}{8a}$$

$$y = \frac{\dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}+\left(-\dfrac{1}{4a}\right)}{2}$$

$$= \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-2}{8a}$$

ดังนั้น พิกัดของจุด K คือ $\left(\dfrac{6m+\sqrt{m^2+4ac}-8acm}{8a},\dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-2}{8a}\right)$

ความชันของเส้นตรง PR $= \dfrac{\left(\dfrac{m^2 + m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-1}{4a}\right)-\left(-\dfrac{1}{4a}\right)}{\left(\dfrac{3m+\sqrt{m^2+4ac4acm}}{4a}\right)-\left(\dfrac{3m-4acm}{4a}\right)}$

$= \dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac}{\sqrt{m^2+4ac}}$

เนื่องจาก เส้นตรง KJ ตั้งฉากกับเส้นตรง PR

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง KJ $= -\left(\dfrac{\sqrt{m^2+4ac}}{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac}\right)$

สมการเส้นตรง KJ คือ

$$y-\left(\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac-2}{8a}\right)=-\left(\frac{\sqrt{m^2+4ac}}{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac}\right)\left[x-\left(\frac{6m+\sqrt{m^2+4ac}-8acm}{8a}\right)\right]$$

$$y=-\left(\frac{\sqrt{m^2+4ac}}{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac}\right)x$$

$$+\left[\frac{4m\sqrt{m^2+4ac}-m^2-4ac+2m^4+2m^3\sqrt{m^2+4ac}+12acm^2+16a^2c^2}{8a\left(m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac\right)}\right]$$ ----------------- (8)

พิกัดของจุด J ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง HJ และ KJ หาได้จาก (7) – (8)

$$-\left[\frac{m^2+4ac}{m\left(m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac\right)}\right]x=\frac{16a^2c^2-5m^2+4acm^2-20ac}{8a\left(m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+4ac\right)}$$

$$x=\frac{5m-4acm}{8a}$$

แทนค่า x ใน (7) จะได้ $y=-\left[\frac{5m-4acm}{8a(m)}\right]+\left(\frac{m^2+2}{4a}\right)$

$$=\frac{2m^2+4ac-1}{8a}$$

ดังนั้น พิกัดของจุดศูนย์กลางวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC อยู่ที่

J $\left(\frac{5m-4acm}{8a},\frac{2m^2+4ac-1}{8a}\right)$

การหาความยาวของรัศมีวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

เนื่องจากเส้นตรง PJ เป็นรัศมีวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC (Figure 8.3) ความยาวของรัศมี PJ สามารถหาได้ ดังนี้

$$|PJ| = \sqrt{\left[\left(\frac{5m-4acm}{8a}\right)-\left(\frac{3m-4acm}{4a}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{2m^2+4ac-1}{8a}\right)-\left(-\frac{1}{4a}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{64a^2}}$$

การหาพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

ให้ T แทนพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

$$T = (\pi)\left[\sqrt{\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{64a^2}}\right]^2$$

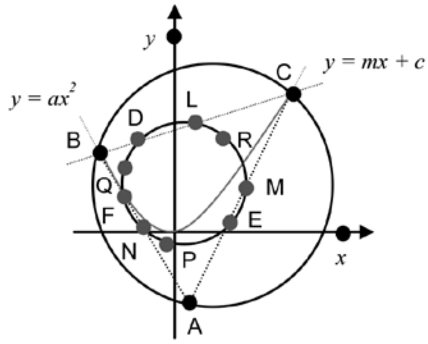
$$= (\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{64a^2}\right) \text{ ตารางหน่วย}$$

นั่นคือ พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC เท่ากับ

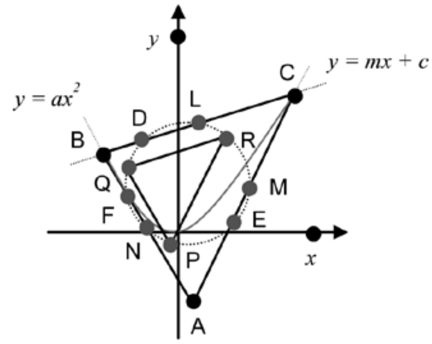
$$(\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{64a^2}\right) \text{ ตารางหน่วย}$$

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแสดงถึงสมบัติและความสัมพันธ์เกี่ยวกับพื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ ดังต่อไปนี้



(9.1)



(9.2)

Figure 9 Properties about Area of Nine-Point Circle of Archimedes' Triangle

ความสัมพันธ์ของพื้นที่วงกลมเก้าจุดกับพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

พิจารณา Figure 9.1 ให้ T แทน พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC
G แทน พื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC

$$\frac{|\mathrm{T}|}{|\mathrm{G}|} = \frac{(\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{64a^2}\right)}{(\pi)\left(\frac{4m^4+5m^2+8acm^2+8ac+16a^2c^2+16a^2c^2m^2+1}{16a^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

นั่นคือ พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่วงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

พิจารณา Figure 9.2 ให้ δ แทน พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์
Ω แทน พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

$$\frac{|\delta|}{|\Omega|} = \frac{\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{16a^2}}{\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}} = \frac{1}{4}$$

นั่นคือ พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์เท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

หมายเหตุ

ในการวิจัยครั้งนี้ได้แสดงการพิสูจน์เฉพาะกรณีที่กำหนด เส้นตรง $y = mx + c$ และ โค้งพาราโบลา $y = ax^2$ ในกรณีที่ m, c และ a มีค่าเป็นบวกเท่านั้น แต่ผลวิจัยนี้มีความครอบคลุมถึงกรณีที่ m, c และ a มีค่าเป็นลบด้วยเช่นกัน

วิจารณ์และสรุปผล

ผลจากการศึกษาครั้งนี้พบว่า พื้นที่วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสซึ่งผลวิจัยดังกล่าวแม้จะยังเป็นประเด็นที่ยังไม่พบการอ้างอิงโดยตรงจากนักวิชาการท่านอื่นมาก่อนแต่ก็อาจเทียบเคียงและกล่าวได้ว่ามีความสอดคล้องกับผลสรุปของ Coxeter. and Greitzer.[2] และ Hofstadter.[7] ที่ได้อธิบายคุณลักษณะเชิงทฤษฎีของรัศมีของวงกลมเก้าจุดและรัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมในกรณีทั่วไปในหนังสือ Geometry Revisited และ From Euler to Ulam Discovery and Dissection of aGeometric Gemไว้ว่า รัศมีของวงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมจะยาวเป็น 1/2 เท่าของรัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมรูปนั้น จากผลสรุปดังกล่าวจะพบว่าหากนำรัศมีของวงกลมมาคำนวณเพื่อหาพื้นที่ของวงกลมทั้งสองแล้วก็จะพบความจริงที่ตรงกับผลการศึกษาวิจัยในครั้งนี้กล่าวคือพื้นที่วงกลมเก้าจุดเท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสนั่นเอง สำหรับผลวิจัยประเด็นต่อมาซึ่งพบว่า พื้นที่รูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์เท่ากับ 1/4 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ข้อค้นพบดังกล่าวถือเป็นผลสรุปใหม่ที่เป็นจริงในกรณีเฉพาะกับรูปสามเหลี่ยมของออยเลอร์ที่เกิดขึ้นภายใต้โครงสร้างที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ถึงแม้ว่ายังไม่พบความสอดคล้องกับผลการศึกษาของนักวิชาการอื่นๆ ก่อนหน้านี้แต่ผลวิจัยดังกล่าวก็ได้รับการพิสูจน์ตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์ดังที่แสดงไว้แล้วในเบื้องต้น

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณยิ่งสำหรับความอนุเคราะห์ของสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย ที่ได้จัดสรรเงินทุนสนับสนุนการศึกษาวิจัยครั้งนี้จนทุกอย่างบรรลุความสำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

1. Bix R. Topics in geometry. San Diego: Academic Press, Inc; 1994.
2. Coxeter MHS, Greitzer LS. Geometry revisited. 7^{th} ed. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America; 1967.
3. Davis T. Four points on a circle. Available from: http:// www. geometer.org/mathcircles. Accessed May 27, 2014.
4. Dunham W. Euler the master of us all. Washington, DC: The Mathematical Association of America; 1998.
5. Erbas KA. An explanatory approach to archimedes's quadrature of the parabola. Available from: http:// jwilson.coe.uga.edu/EMT668/ EMAT6680.F99/Erbas/ emat6690/essay1/essay1.html. Accessed July 2, 2015.
6. Faucette WM. The nine-point circle. Available from:www.westga.edu/~faucette/research/Eulerline. pdf. Accessed May 24, 2014.
7. Hofstadter DR. From Euler to Ulam discovery and dissection of a geometric gem. Indiana: Indiana University; 1992.
8. Kay DC. College geometry a unified development. New York: CRC Press Taylor & Francis Group; 2011.
9. Woltermann M. Archimedes' squaring of parabola. Available from: www2. washjeff. edu/ users/mwoltermann/Dorrie/56.pdf. Accessed January 31, 2014.
10. Yiu P. Introduction to the geometry of the triangle. Florida: Florida Atlantic University; 2001.