การจัดเรียงใหม่เป็นหนึ่งมิติของอนุกรมซ้อนกันและสูตรลดทอน

Rearrangement to one-dimensional iterated series and reduction formulas

รัชนัย ไข่แก้ว[1] และ ฉัตรชัย พุฒิรุ่งโรจน์[2*]
Rachanai Kaikeaw[1] and Chatchai Puttirungroj[2*]

Received: 13 July 2023 ; **Revised**: 5 October 2023 ; **Accepted**: 6 November 2023

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอในการจัดเรียงอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นให้เป็นอนุกรมชั้นเดียวโดยใช้วิธีพื้นฐานในการพิสูจน์ และอาศัยเงื่อนไขดังกล่าวเพื่อสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}(x_1x_2\cdots x_k)^t\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ เมื่อ $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ และ $t\in\{0,1,2\}$, โดยใช้วิธีทางฟังก์ชันก่อกำเนิด

คำสำคัญ: อนุกรมหลายชั้น, อนุกรมซ้อนกัน, สูตรลดทอน

Abstract

This article investigates the sufficient conditions for the rearrangement of multiple iterated series into a single-level series through the utilization of fundamental proof methods. These conditions were subsequently applied to establish reduction formulas for a series of the form $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\quad\sum_{x_k=0}^{\infty}(x_1x_2\quad x_k)^t\cdot f(x_1+x_2+\quad+x_k)$, where $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ and $t\in\{0,1,2\}$, employing techniques derived from generating functions.

Keywords: Multiple series, iterated series, reduction formula

[1] คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี กรุงเทพมหานคร Email rachanai.k@dru.ac.th
[2] สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช นนทบุรี Email cputtirungroj@gmail.com
[1] Faculty of Science and Technology, Dhonburi Rajabhat University, Bangkok
[2] School of Educational Studies, Sukhothai Thammathirat Open University, Nonthaburi
* Corresponding author E-mail: cputtirungroj@gmail.com

บทนำ

ในปี ค.ศ. 2011 Furdui และ Trif (Furdui & Trif, 2011) ได้ศึกษาวิธีทั่วไปสำหรับการหาผลรวมของอนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n+m}$ เมื่อ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงภายใต้เงื่อนไขบางประการ และในบทความเดียวกันพวกเขาได้หารูปแบบปิดของอนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}a_{n_1+n_2+\cdots+n_k}$ อีกด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Furdui (Furdui, 2013) กล่าวถึงปัญหาปลายเปิดและข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับอนุกรมหลายชั้น $\sum_{n_1,n_2,\dots,n_k=1}^{\infty}\frac{n_1n_2\cdots n_k}{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}$ ซึ่งปัญหานี้ถูกแก้โดย Furdui และ Qin ในปี ค.ศ. 2015 (Qin & Furdui, 2015)

จากผลงานของ Furdui ผู้วิจัยสังเกตว่ามีขั้นตอนบางส่วนที่สามารถขยายแนวคิดไปยังอนุกรมอื่น ที่มีลักษณะคล้ายกันได้ ในบทความนี้ เราพิจารณาอนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}g(x_1,x_2,\dots,x_k)\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k) \qquad (1.1)$$

เมื่อ $k\in\mathbb{N}$, $g:\mathbb{N}_0^k\to\mathbb{R}$ และ $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}_0$ แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ) วัตถุประสงค์ของบทความนี้คือการพิสูจน์ทฤษฎีบทการจัดเรียงใหม่เป็นหนึ่งมิติ ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำคัญที่จะทำให้เราสามารถนำแต่ละพจน์ของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นมาจัดเรียงใหม่ให้เป็นแนวตรงได้ จากนั้นอาศัยทฤษฎีบทดังกล่าวในการสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรม (1.1) ให้เป็นอนุกรมอนันต์ชั้นเดียว และสร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่มีรูปแบบเฉพาะบางชนิด นั่นคือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}(x_1x_2\cdots x_k)^t\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k) \qquad (1.2)$$

เมื่อ $k\in\mathbb{N}, f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ และ $t\in\{0,1,2\}$

หมายเหตุ ในที่นี้ กำหนด $(x_1x_2\cdots x_k)^t = 1$ เมื่อ $t=0$ และ $x_1x_2\cdots x_k=0$

ความรู้พื้นฐาน

อนุกรมหลายชั้น (multiple series) มีรูปแบบทั่วไปได้หลายลักษณะ เช่น รูปแบบ (2.1) และ (2.2) ต่อไปนี้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k) \qquad (2.1)$$

$$\sum_{x_1,x_2,\dots,x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k) \qquad (2.2)$$

เมื่อ $A:\mathbb{N}_0^k\to\mathbb{C}$ อนุกรมทั้งสองรูปแบบมีความหมายและบทนิยามของการลู่เข้าแตกต่างกัน ในบทความนี้ เราสนใจอนุกรมรูปแบบ (2.1) ซึ่งเรียกว่า อนุกรมซ้อนกันหลายชั้น (multiple iterated series) (Furdui, 2013) และมีบทนิยามของการลู่เข้า ดังนี้

บทนิยาม 2.1

สำหรับจำนวนเต็ม $k\geq 2$ และ $A:\mathbb{N}_0^k\to\mathbb{C}$ เราจะกล่าวว่า อนุกรมซ้อนกัน k ชั้น $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k)$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. อนุกรมซ้อนกัน $k-1$ ชั้น $\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k)$ ลู่เข้า ทุก $x_1\in\mathbb{N}_0$

2. อนุกรม $\sum_{x_1=0}^{\infty}B(x_1)$ ลู่เข้า โดยที่

$$B(x_1)=\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k) \quad \text{ทุก } x_1\in\mathbb{N}_0$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักจะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเรื่องอนุกรมอนันต์ซึ่งพบได้ทั่วไปจากเอกสารเกี่ยวกับแคลคูลัสและคณิตวิเคราะห์ ในที่นี้จะอ้างถึงเฉพาะข้อเท็จจริงบางส่วนเท่าที่จำเป็น

บทตั้ง 2.1

ให้ $A:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ ถ้า $\sum_{x=0}^{\infty}A(x)$ ลู่เข้า และ $A(x)\geq 0$ ทุก $x\in\mathbb{N}_0$ แล้ว ทุกจำนวนจริง α ซึ่ง $\alpha<\sum_{x=0}^{\infty}A(x)$ จะมีจำนวนเต็ม $N>0$ ซึ่ง $\sum_{x=0}^{N}A(x)>\alpha$

บทตั้ง 2.2

ให้ $A:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ ถ้า $\sum_{x=0}^{\infty}A(x)$ ลู่ออก $A(x)\geq 0$ และทุก $x\in\mathbb{N}_0$ แล้ว ทุกจำนวนจริง $\alpha>0$ จะมีจำนวนเต็ม $N>0$ ซึ่ง $\sum_{x=0}^{N}A(x)>\alpha$

บทตั้ง 2.1 และบทตั้ง 2.2 สามารถขยายแนวคิดไปสู่อนุกรมซ้อนกันหลายชั้นได้เป็นบทตั้ง 2.3 และบทตั้ง 2.4 ตามลำดับ

บทตั้ง 2.3

ให้ $k\in\mathbb{N}$ และ $A:\mathbb{N}_0^k\to\mathbb{R}$

ถ้าอนุกรม $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}A(x_1,x_2,\dots,x_k)$ ลู่เข้า และ

$A(x_1,x_2,\cdots,x_k)\geq 0$ ทุก $x_1,x_2,\cdots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ แล้วจะได้ว่า ทุกจำนวนจริง α ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_k)$$

จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ซึ่ง

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in S} A(x_1,x_2,...,x_k) > \alpha$$

บทพิสูจน์

พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร k

<u>ขั้นฐานของการอุปนัย</u>

(กรณี $k = 1$) เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 2.1

<u>ขั้นการอุปนัย</u> (สมมติให้บทตั้งเป็นจริงกรณี k จะพิสูจน์ว่าบทตั้งเป็นจริงกรณี $k + 1$)

ในการพิสูจน์บทตั้งกรณี $k + 1$ จะเริ่มจากการสมมติว่า

$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$ ลู่เข้า และ

$A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\geq 0$ ทุก $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1}$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$ ลู่เข้าทุก $x_1 \in \mathbb{N}_0$

เราจึงสามารถกำหนดให้

$$B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$$

ทุก $x_1 \in \mathbb{N}_0$ นอกจากนี้ กำหนดให้ $\beta = \sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1)$ ส่วนที่เหลือคือการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

"ทุกจำนวนจริง α ซึ่ง $\alpha < \beta$ จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^{k+1}$ ซึ่ง $\sum_{(x_1,x_2,...,x_{k+1})\in S} A(x_1,x_2,...,x_k) > \alpha$"

ให้ α เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\alpha < \beta$ จะได้

$\frac{\alpha+\beta}{2} < \sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1)$ จากบทตั้ง 2.1 จะมีจำนวนเต็ม

$N > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{x_1=0}^{N} B(x_1) > \frac{\alpha+\beta}{2}$

เนื่องจาก $B(x_1) - \frac{\beta-\alpha}{2N}$

$$< B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$$

ทุก $x_1 \in \mathbb{N}_0$ เมื่อใช้บทตั้งนี้ในกรณี k กับอนุกรม

$\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$ ทุกค่า $x_1 \in \mathbb{N}_0$

จะได้ว่า แต่ละ $x_1 \in \mathbb{N}_0$ จะมีเซตจำกัด $S_{x_1} \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ซึ่ง

$$\sum_{(x_2,x_3,...,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,...,x_{k+1}) > B(x_1) - \frac{\beta-\alpha}{2N}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{N}\sum_{(x_2,x_3,...,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$$

$$> \sum_{x_1=0}^{N} B(x_1) - \frac{\beta-\alpha}{2} > \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} = \alpha$$

เพราะฉะนั้น จึงมีเซตจำกัด

$$S = \begin{Bmatrix} (x_1,x_2,...,x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \mid \\ 0 \leq x_1 \leq N, (x_2,x_3,...,x_{k+1}) \in S_{x_1} \end{Bmatrix}$$

ซึ่ง

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_{k+1})\in S} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$$

$$= \sum_{x_1=0}^{N}\sum_{(x_2,x_3,...,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,...,x_{k+1}) > \alpha$$

□

บทตั้ง 2.4

ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $A : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{R}$

ถ้า $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ ลู่ออก และ

$A(x_1,x_2,\cdots,x_k)\geq 0$ ทุก $x_1,x_2,\cdots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ แล้ว ทุกจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ซึ่ง

$$\sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in S} A(x_1,x_2,...,x_k) > \alpha$$

บทพิสูจน์

พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนตัวแปร k

<u>ขั้นฐานของการอุปนัย</u>

(กรณี $k = 1$) เห็นได้ชัดจากบทตั้ง 2.2

<u>ขั้นการอุปนัย</u>

(สมมติให้บทตั้งเป็นจริงกรณี k จะพิสูจน์ว่าบทตั้งเป็นจริงกรณี $k + 1$)

ในการพิสูจน์บทตั้งกรณี $k + 1$ จะเริ่มจากการสมมติว่า $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,...,x_{k+1})$

ลู่ออกและ

$A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}) \geq 0$ ทุก $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$

จากนั้นจะต้องพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

"ทุกจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^{k+1}$ ซึ่ง $\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})\in S} A(x_1,x_2,\dots,x_k) > \alpha$ "

จากบทนิยาม 2.1 เมื่อ

$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$ ลู่ออก จะเกิดได้ 2 กรณี คือ

1. กรณีมี $x_1 \in \mathbb{N}_0$ ที่ทำให้ $\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$ ลู่ออก

ให้จำนวนจริง $\alpha > 0$ โดยบทตั้งกรณี k จะมีเซตจำกัด $S_{x_1} \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ซึ่ง $\sum_{(x_2,x_3,\dots,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) > \alpha$ ดังนั้นจึงมีเซตจำกัด

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \mid \\ (x_2,x_3,\dots,x_{k+1}) \in S_{x_1} \end{array} \right\}$$

ซึ่ง $\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})\in S} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$

$$= \sum_{(x_2,x_3,\dots,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) > \alpha$$

2. กรณี $\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$ ลู่เข้า ทุก $x_1 \in \mathbb{N}_0$

กำหนดให้

$$B(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) \text{ ทุก } x_1 \in \mathbb{N}_0$$

ให้จำนวนจริง $\alpha > 0$ เนื่องจาก $\sum_{x_1=0}^{\infty} B(x_1)$ ลู่ออก และ $B(x_1) \geq 0$ ทุก $x_1 \in \mathbb{N}_0$ โดยบทตั้ง 2.2 จะมีจำนวนเต็ม $N > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{x_1=0}^{N} B(x_1) > \alpha + 1$

เนื่องจาก $B(x_1) - \frac{1}{N} < B(x_1)$

$$= \sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) \text{ ทุก } x_1 \in \mathbb{N}_0$$

เมื่อใช้บทตั้ง 2.3 กับอนุกรม

$\sum_{x_2=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_{k+1}=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$ ทุกค่า $x_1 \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า แต่ละ $x_1 \in \mathbb{N}_0$ จะมีเซตจำกัด $S_{x_1} \subseteq \mathbb{N}_0^k$

ซึ่ง $\sum_{(x_2,x_3,\dots,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) > B(x_1) - \frac{1}{N}$

ดังนั้น $\sum_{x_1=0}^{N}\sum_{(x_2,x_3,\dots,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$

$$> \sum_{x_1=0}^{N} B(x_1) - 1 > \alpha + 1 - 1 = \alpha$$

เพราะฉะนั้น จึงมีเซตจำกัด

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \mid \\ 0 \leq x_1 \leq N, (x_2,x_3,\dots,x_{k+1}) \in S_{x_1} \end{array} \right\}$$

ซึ่ง $\sum_{(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})\in S} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1})$

$$= \sum_{x_1=0}^{N}\sum_{(x_2,x_3,\dots,x_{k+1})\in S_{x_1}} A(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) > \alpha$$

□

นอกจากความรู้พื้นฐานที่กล่าวมาข้างต้น ผู้อ่านจะต้องอาศัยความรู้เรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด(generating function) และ ทฤษฎีบททวินามติดลบ (negative binomial theorem) ซึ่งสามารถทบทวนได้ที่ (Beeler, 2015), (Chuan-Chong & Khee-Meng, 1992) หรือเอกสารทั่วไปเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เชิงการจัด เพื่อใช้ประกอบการศึกษาหัวข้อถัดไป

การจัดเรียงใหม่ให้เป็นหนึ่งมิติ

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า $\mathbb{N}_0^k$ เป็น เซตนับได้ (countable set) นั่นคือ เราสามารถนำสมาชิกทั้งหมดใน $\mathbb{N}_0^k$ ซึ่งอยู่ในปริภูมิ k มิติ มาเรียงลำดับใหม่เป็นแนวตรงได้ ดังนั้นเราอาจลดทอนอนุกรมอนันต์ที่ซ้อนกัน k ชั้นให้เหลือเพียงอนุกรมอนันต์ชั้นเดียวโดยสร้างกฎเกณฑ์สำหรับเรียงลำดับแต่ละพจน์ที่ปรากฏในผลบวก k มิติให้เป็นผลบวกแนวตรงซึ่งมีหนึ่งมิติ อย่างไรก็ตาม กระบวนการนี้อาจส่งผลกระทบต่อการลู่เข้าหรือค่าของอนุกรม ทฤษฎีบทที่จะพิสูจน์ในหัวข้อนี้ช่วยยืนยันได้ว่า ในกรณีที่แต่ละพจน์ของอนุกรมเป็นค่าจริงที่ไม่เป็นลบและในกรณีที่อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ กระบวนการดังกล่าวจะไม่ทำให้การลู่เข้าหรือค่าของอนุกรมเปลี่ยนแปลง

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $k \in \mathbb{N}$, $A : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{R}$, และ $\phi : \mathbb{N}_0 \xrightarrow[onto]{1-1} \mathbb{N}_0^k$ ถ้า $A(x_1, x_2, \cdots, x_k) \geq 0$ ทุก $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ แล้ว จะได้ว่า

ก. $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่เข้า

ข. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่เข้า แล้ว

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

บทพิสูจน์ ก.

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์สมมูลกับ

$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ลู่ออก ก็ต่อเมื่อ

$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่ออก

($\Longrightarrow$) สมมติให้ $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ลู่ออก จากบทตั้ง 2.4 จะได้ว่า

ทุกจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ซึ่ง

$$\sum_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in S} A(x_1, x_2, ..., x_k) > \alpha$$

เนื่องจาก $\sum_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in S} A(x_1, x_2, ..., x_k)$

เป็นผลบวกจำกัด ซึ่งทุกพจน์ปรากฏใน $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ โดยที่ $A(\phi(n)) \geq 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in S} A(x_1, x_2, ..., x_k) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า $\alpha > 0$ ดังนั้น

$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่ออก

($\Longleftarrow$) สมมติให้ $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่ออก จากบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า ทุกจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีจำนวนเต็ม $N > 0$

ซึ่ง $\sum_{n=0}^{N} A(\phi(n)) > \alpha$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{N} A(\phi(n))$ เป็นผลบวกจำกัดซึ่งทุกพจน์ปรากฏใน $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ โดยที่

$A(x_1, x_2, \cdots, x_k) \geq 0$ ทุก $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{N}_0^k$

จะได้ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k) \geq \sum_{n=0}^{N} A(\phi(n)) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า $\alpha > 0$ ดังนั้น

$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ลู่ออก

บทพิสูจน์ ข.

จากข้อ ก. เมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$ ลู่เข้า

จะได้ $\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ลู่เข้าด้วย

ต่อไปจะพิสูจน์ 2 ส่วน ดังนี้

1. พิสูจน์ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k) \geq \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

ให้ α เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\alpha < \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$

จากบทตั้ง 2.1 จะมีจำนวนเต็ม $N > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{N} A(\phi(n)) > \alpha$ ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k) \geq \sum_{n=0}^{N} A(\phi(n)) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า α ซึ่ง $\alpha < \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k) \geq \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

2. พิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$$

ให้ α เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1, x_2, ..., x_k)$$

จากบทตั้ง 2.3 จะมีเซตจำกัด $S \subseteq \mathbb{N}_0^k$

ซึ่ง $\sum_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in S} A(x_1, x_2, ..., x_k) > \alpha$

ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in S} A(x_1,x_2,\ldots,x_k) > \alpha$$

อสมการข้างต้นเป็นจริงทุกค่า α ซึ่ง

$$\alpha < \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n)) \geq \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นอีกเงื่อนไขหนึ่งซึ่งสามารถใช้สำหรับอนุกรมที่มีบางพจน์เป็นจำนวนจริงที่ติดลบหรือเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $k \in \mathbb{N}$, $A : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{C}$ และ $\phi : \mathbb{N}_0 \xrightarrow[onto]{1-1} \mathbb{N}_0^k$ ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}\left|A(\phi(n))\right|$ ลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

บทพิสูจน์

สำหรับทุก $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

ให้ $R(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ แทน ส่วนจริง (real part) ของ $A(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ เราทราบว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\left|A(\phi(n))\right|$ ลู่เข้า และ $\left|A(\phi(n))\right| \geq \left|R(\phi(n))\right| \geq 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}_0$

จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty}\left|R(\phi(n))\right|$ ลู่เข้า โดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (comparison test)

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left|R(\phi(n))\right|$ ลู่เข้า และ

$$2\left|R(\phi(n))\right| \geq \left|R(\phi(n))\right| - R(\phi(n)) \geq 0$$

ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|R(\phi(n))\right| - R(\phi(n))\right)$

ลู่เข้า โดยการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ เช่นกัน

เห็นได้ชัดว่า $\left|R(x_1,x_2,\ldots,x_k)\right| \geq 0$

ทุก $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\left|R(x_1,x_2,\ldots,x_k)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|R(\phi(n))\right| \tag{1}$$

นอกจากนี้

$$\left|R(x_1,x_2,\ldots,x_k)\right| - R(x_1,x_2,\ldots,x_k) \geq 0$$

ทุก $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\left(\left|R(x_1,x_2,\ldots,x_k)\right| - R(x_1,x_2,\ldots,x_k)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|R(\phi(n))\right| - R(\phi(n))\right)\end{aligned} \tag{2}$$

นำสมการ (1) ลบด้วยสมการ (2) จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} R(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\phi(n)) \tag{3}$$

สำหรับทุก $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

ให้ $I(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ แทน ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $A(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ จะสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ (3) ว่า

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} I(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} I(\phi(n)) \tag{4}$$

จากสมการ (3) และ (4) เราจะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} A(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\phi(n))$$

□

สูตรลดทอน

ผลลัพธ์จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้เราได้สูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $k \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{R}$ และ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ นอกจากนี้ กำหนดให้

$$A_n = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k \middle| x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n\right\}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}_0$

ถ้า $g(x_1,x_2,\ldots,x_k)\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k) \geq 0$

ทุก $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}_0^k$ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} g(x_1,x_2,\ldots,x_k)\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} g(x_1,x_2,\ldots,x_k)\cdot f(n)\end{aligned} \tag{4.1}$$

บทพิสูจน์

เนื่องจาก A_n เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ ดังนั้น จะมีฟังก์ชัน

$$\theta_n : \{0,1,2,\ldots,a_n - 1\} \xrightarrow[onto]{1-1} A_n \text{ ทุกค่า } n \in \mathbb{N}_0$$

โดยที่จำนวนเต็ม $a_n \geq 1$ แทนจำนวนสมาชิกของ A_n ซึ่งจะเห็นว่า $a_0 = 1$ และ $\theta_0(0) = (0,0,...,0)$

ให้ $b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$ ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ จะได้ว่า $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ เป็นลำดับเพิ่มบน $\mathbb{N}$ ดังนั้น ทุก $n \in \mathbb{N}$ จะมี $s_n \in \mathbb{N}_0$ เพียงค่าเดียวซึ่ง $b_{s_n} \leq n < b_{s_n+1}$ นั่นคือ $n - b_{s_n} \in \{0,1,2,...,a_{s_n+1}-1\}$

เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชัน $\phi : \mathbb{N}_0 \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ โดย

$$\phi(n) = \begin{cases} \theta_{s_n+1}\left(n - b_{s_n}\right) & ; n \in \mathbb{N} \\ (0,0,...,0) & ; n = 0 \end{cases}$$

กล่าวคือ ฟังก์ชัน ϕ เป็นการเรียงสมาชิกทั้งหมดของ $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ โดยเริ่มจากสมาชิกของ A_0 ตามด้วยสมาชิกของ A_1 ตามด้วยสมาชิกของ A_2 และเป็นเช่นนี้เรื่อยไปตามลำดับ นอกจากนี้ $\{A_0, A_1, A_2,...\}$ เป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของ $\mathbb{N}_0^k$ ทำให้สรุปได้ว่า $\phi : \mathbb{N}_0 \xrightarrow[onto]{1-1} \mathbb{N}_0^k$

ต่อไป นิยามฟังก์ชัน

$h : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{R}$ โดย

$$h(x_1, x_2,..., x_k) = g(x_1, x_2,..., x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

ทุก $(x_1, x_2,..., x_k) \in \mathbb{N}_0^k$

จะเขียนได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\phi(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} h(x_1, x_2,..., x_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} g(x_1,..., x_k) \cdot f(x_1 + \cdots + x_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} g(x_1, x_2,..., x_k) \cdot f(n)$$

จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} h(x_1, x_2,..., x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(\phi(n))$$

นั่นคือ

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} g(x_1, x_2,..., x_k) \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} g(x_1, x_2,..., x_k) \cdot f(n)$$

□

หมายเหตุ ถ้าอนุกรมด้านใดด้านหนึ่งของสมการ (4.1) ลู่ออก แล้วอนุกรมอีกด้านจะลู่ออกด้วย

สูตรลดทอนที่เราได้สำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.2) คือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ถ้า $f(n) \geq 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}_0$ แล้ว จะได้ว่า

ก. $$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} f(n) \tag{4.2}$$

ข. $$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} x_1 x_2 \cdots x_k \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{2k-1} f(n) \tag{4.3}$$

ค. $$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \cdots x_k)^2 \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1} f(n) \tag{4.4}$$

บทพิสูจน์ ก.

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} 1 \cdot f(n)$$

สังเกตว่า $\sum_{(x_1,x_2,...,x_k)\in A_n} 1$

คือสัมประสิทธิ์ของ z^n จากการกระจายฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$F(z)=\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right)^k=\left(1+z+z^2+\cdots\right)^k$$

ในขณะเดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m=\frac{1}{1-z}$$

ดังนั้น สามารถเขียน $F(z)$ได้อีกแบบคือ

$$F(z)=\left(\frac{1}{1-z}\right)^k=(1-z)^{-k}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k-1} Z^m \quad ; \text{ ทฤษฎีบททวินาม}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ z^n ใน $F(z)$ จะได้

$$\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} 1=\binom{n+k-1}{k-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1} f(n)$$

บทพิสูจน์ ข.

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} x_1x_2\cdots x_k\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} x_1x_2\cdots x_k\cdot f(n)$$

สังเกตว่า $\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} x_1x_2\cdots x_k$

คือสัมประสิทธิ์ของ z^n จากการกระจายฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$F(z)=\left(\sum_{m=0}^{\infty} mz^m\right)^k=\left(z+2z^2+3z^3+\cdots\right)^k$$

ในขณะเดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} mz^m=\frac{z}{(1-z)^2}$$

ดังนั้น สามารถเขียน $F(z)$ ได้อีกแบบคือ

$$F(z)=\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)^k=z^k(1-z)^{-2k}$$

$$=z^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+2k-1}{2k-1} z^m \quad ; \text{ ทฤษฎีบททวินาม}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+2k-1}{2k-1} z^{m+k}$$

$$=\sum_{m=-k}^{\infty}\binom{m+2k-1}{2k-1} z^{m+k} \quad ;$$

$$\binom{m+2k-1}{2k-1}=0 \text{ เมื่อ } -k\le m<0$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{2k-1} z^m$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ z^n ใน $F(z)$ จะได้

$$\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} x_1x_2\cdots x_k=\binom{n+k-1}{2k-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} x_1x_2\cdots x_k\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{2k-1} f(n)$$

บทพิสูจน์ ค.

จากทฤษฎีบท 4.1 จะได้

$$\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1x_2\cdots x_k)^2\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} (x_1x_2\cdots x_k)^2\cdot f(n)$$

สังเกตว่า $\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in A_n} (x_1x_2\cdots x_k)^2$

คือสัมประสิทธิ์ของ z^n จากการกระจายฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$F(z)=\left(\sum_{m=0}^{\infty} m^2z^m\right)^k=\left(z+2^2z^2+3^2z^3+\cdots\right)^k$$

ในขณะเดียวกันเราทราบว่า

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 z^m = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

ดังนั้นสามารถเขียน $F(z)$ ได้อีกแบบคือ

$$F(z) = \left(\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \right)^k = z^k (1+z)^k (1-z)^{-3k}$$

$$= z^k \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} z^r \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^m$$

; ทฤษฎีบททวินาม

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^{m+r+k}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{m=-r-k}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+3k-1}{3k-1} z^{m+r+k} \; ;$$

$\binom{m+3k-1}{3k-1} = 0$ เมื่อ $0 \le r \le k$, $-r - k \le m < 0$

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{r} \binom{m+2k-r-1}{3k-1} z^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \binom{m+2k-r-1}{3k-1} z^m$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ z^n ใน $F(z)$ จะได้

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in A_n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^2 = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} (x_1 x_2 \cdots x_k)^2 \cdot f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \binom{n+2k-r-1}{3k-1} f(n)$$

□

หมายเหตุ ถ้าอนุกรมด้านใดด้านหนึ่งของสมการ (4.2), (4.3) และ (4.4) ลู่ออก แล้วอนุกรมอีกด้านจะลู่ออกด้วย

ตัวอย่างการประยุกต์

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างการคำนวณค่าของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นโดยประยุกต์ทฤษฎีบท 4.2 เพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นภาพการใช้งานพอสังเขป

ตัวอย่าง 5.1 หาค่าของอนุกรม

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!}$$

วิธีทำ

ให้ $f(n) = \frac{1}{n!}$ จะได้ $f(n) \ge 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}_o$

จากทฤษฎีบท 4.2 (ก) จะได้

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!}$$

เราทราบว่า $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ นั่นคือ $x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ และเนื่องจากอนุกรมกำลังสามารถหาอนุพันธ์ได้เทอมต่อเทอม ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $x^2 e^x$ ที่ $x = 1$ คือ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 e^x\right)\Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^{n+2}}{n!}\right)\Big|_{x=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!}$$

แต่จะเห็นว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 e^x\right)\Big|_{x=1} = \left(x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x\right)\Big|_{x=1} = 7e$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+z)!} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 e^x\right)\Big|_{x=1} = \frac{7e}{2}$$

□

ตัวอย่าง 5.2

หาค่าของอนุกรม

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{xyz}{(x+y+z)!}$$

วิธีทำ

โดยวิธีเดียวกับตัวอย่าง 5.1 และทฤษฎีบท 4.2 (ข) จะได้

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{xyz}{(x+y+z)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{5}\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{5!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{n!}$$
$$=\frac{1}{120}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{x^{n+2}}{n!}\right)\Bigg|_{x=1}$$
$$=\frac{1}{120}\frac{d^5}{dx^5}\left(x^2e^x\right)\Big|_{x=1}$$
$$=\frac{31e}{120}$$

ตัวอย่าง 5.3

หาค่าของอนุกรม

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(xyz)^2}{(x+y+z)!}$$

□

วิธีทำ

โดยวิธีเดียวกับตัวอย่าง 5.1 และทฤษฎีบท 4.2 (ค) จะได้

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(xyz)^2}{(x+y+z)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\binom{n+5-r}{8}\frac{1}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{n+5}{8}+3\binom{n+4}{8}+3\binom{n+3}{8}+\binom{n+2}{8}\right)\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{8!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^8}{dx^8}\left(\frac{x^{n+5}+3x^{n+4}+3x^{n+3}+x^{n+2}}{n!}\right)\Bigg|_{x=1}$$
$$=\frac{1}{8!}\frac{d^8}{dx^8}\left((x^5+3x^4+3x^3+x^2)e^x\right)\Big|_{x=1}$$
$$=\frac{773e}{1008}$$

□

สรุปผลการวิจัย

ในบทความนี้ เราได้สร้างสูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) และ (1.2) โดยมีแนวคิดคือการจัดเรียงแต่ละพจน์ของอนุกรมหลายชั้นใหม่ให้เป็นผลบวกแนวตรง เราเริ่มจากการพิสูจน์เงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้วิธีจัดเรียงดังกล่าวไม่เปลี่ยนแปลงการลู่เข้าหรือค่าของอนุกรม นั่นคือ ทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 โดยอาศัยเพียงความรู้พื้นฐานของอนุกรมชั้นเดียวในการพิสูจน์ จากนั้นจึงเลือกกฎเกณฑ์ที่เหมาะสมในการเรียงลำดับและจัดกลุ่ม เพื่อสร้างสูตรลดทอนทั่วไปสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.1) นั่นคือ ทฤษฎีบท 4.1 และเมื่อใช้สูตรลดทอนทั่วไปร่วมกับเทคนิคการนับด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดจะทำให้ได้สูตรลดทอนสำหรับอนุกรมที่อยู่ในรูป (1.2) นั่นคือ ทฤษฎีบท 4.2 ผลลัพธ์ที่เราได้ในบทความนี้ นอกจากจะช่วยให้คำนวณค่าแจ้งชัดของอนุกรมซ้อนกันหลายชั้นได้ง่ายขึ้นแล้ว ยังอาจนำไปประยุกต์กับ อนุกรมกำลังรูปนัย (formal power series) ที่มีหลายตัวแปรบางรูปแบบ ผู้สนใจสามารถดูรายละเอียดเกี่ยวกับอนุกรมกำลังรูปนัยได้ที่ (Haukkanen, 2019) และ (Niven, 1969)

References

Beeler, R. A. (2015). *How to count: An introduction to combinatorics and Its applications*. Springer Cham.

Chuan-Chong, C., & Khee-Meng, K. (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific Publishing Company.

Furdui, O., & Trif, T. (2011). On the summation of certain iterated series. *Journal of Integer Sequence*, *14*(6), Article 11.6.1.

Furdui, O. (2013). *Limits, series, and fractional part integrals: Problems in mathematical analysis*. Springer.

Haukkanen, P. (2019). Formal power series in several variables. *Notes on Number Theory and Discrete Math*, *25*(4), 44-57.

Niven, I. (1969). Formal power series. *The American Mathematical Monthly*, *76*(8), 871-889.

Qin, H., & Furdui, O. (2015). Three open problems and a conjecture. *Open Mathematic Journal*, *13*(1), 729-736.