

## วิทยากระแสของวัสดุหยุ่นหนืดเชิงเส้น

## Rheology of Linear Viscoelastic Materials

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์<sup>1\*</sup>Chanyut Kolutawong<sup>1\*</sup>

Received: 29 January 2019 ; Revised: 22 March 2019 ; Accepted: 29 August 2019

## บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไป (Generalized linear viscoelastic material) ที่สร้างขึ้นมาจากแนวคิดของแมกซ์เวลล์ที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ด้วยการต่ออนุกรมระหว่างสปริงและตัวหน่วงแล้วนำมาต่อขนานกันหลาย ๆ ชุด ในบทความได้แสดงถึงที่มาที่ไปของแบบจำลองแมกซ์เวลล์ แบบจำลองเจ็ฟฟรีส์ และสมการทั่วไปของวัสดุหยุ่นหนืดเชิงเส้นพร้อมผลเฉลย อีกทั้งได้กล่าวถึงทฤษฎีของสปริงส์ (Spriggs theorem) ที่นำมาใช้ในการเพิ่มจำนวนสเปกตรัมของแบบจำลองให้เป็นจำนวนอนันต์ชุดแต่ยังคงจำนวนตัวแปรเท่ากับสเปกตรัมเดี่ยวบวกกับค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงส์  $\alpha$  เท่านั้น ถึงแม้ว่าสมการแสดงพฤติกรรมของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปสามารถใช้แทนพฤติกรรมของเหลวพอลิเมอร์ได้เป็นอย่างดี แต่อย่างไรก็ตามสมการแสดงพฤติกรรมของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปก็ยังมีข้อจำกัดในการใช้งานอยู่หลายข้อเช่นกัน

**คำสำคัญ:** ของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไป แบบจำลองแมกซ์เวลล์ แบบจำลองเจ็ฟฟรีส์ ทฤษฎีของสปริงส์

## Abstract

This article shows the relationship between stress and strain of a generalized linear viscoelastic material. From a well-known Maxwell constitute equation, a model that contains a spring and a dashpot connected in series, a linear viscoelastic model is further generalized by improving the model spectra to infinity series paralleled to each other. Furthermore, in the article, the Maxwell, Jefferys, and generalized linear viscoelastic models with their proposed solutions are derived. The Spriggs theorem is also introduced to improve the model spectra to infinity series; however, the model parameters is still minimized to a single spectrum plus a Spriggs coefficient  $\alpha$ . Finally, limitations of the linear viscoelastic constitute equations are discussed.

**Keywords:** Generalized linear viscoelastic fluids, Maxwell model, Jeffreys model, Spriggs theorem.

<sup>1</sup> รองศาสตราจารย์ ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

<sup>1</sup> Associate Professor, Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok 10800, Thailand

\* Corresponding author: Chanyut Kolutawong, E-mail: chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

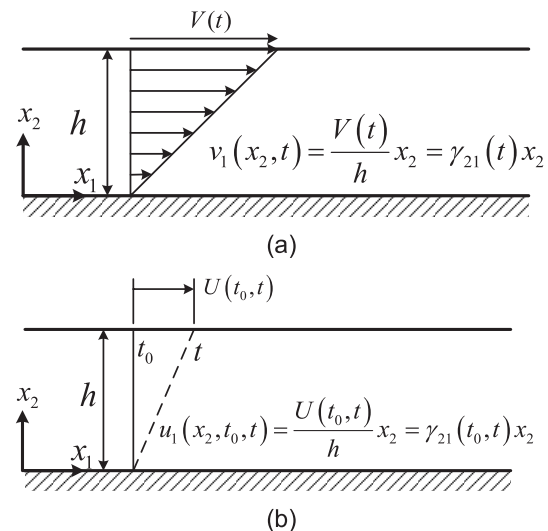
**บทนำ**

พฤติกรรมวิสโคอีลาสติกของพอลิเมอร์จะมีพฤติกรรมอยู่ระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว พอลิเมอร์เหลว (Liquid polymers) บางครั้งเรียกว่าของไหลหนืดหยุ่น (Viscoelastic fluids) ซึ่งมาจากคำว่า ความหนืด (Viscous) และความยืดหยุ่น (Elastic) นั่นคือของไหลประเภทนี้มีทั้งสมบัติเป็นของไหล (Fluid) ที่มีความยืดหยุ่นสูงอย่างเห็นได้ชัด โดยทั่วไปแล้วของไหลจะเปลี่ยนรูปไปตามภาชนะ แต่ในทางวิศวกรรมของไหลจะถูกนิยามเมื่อเปลี่ยนรูปไปอย่างถาวรในขณะที่ถูกแรงเฉือนกระทำ ในขณะที่ความยืดหยุ่นจะหมายถึงความสามารถของวัสดุในการกลับคืนสู่สภาพเดิมก่อนการเสียรูปโดยทั่วไปสมบัติความยืดหยุ่นจะมีในของแข็ง เช่น ยางคงรูป เป็นต้น ดังนั้นของไหลยืดหยุ่นจึงเป็นวัสดุที่มีความพิเศษที่รวมเอาสมบัติของของไหลและของแข็งมารวมกัน

การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลว (Polymer melts) และสารละลายพอลิเมอร์ (Polymer solutions) ซึ่งในที่นี้จะเรียกรวม ๆ กันว่าพอลิเมอร์เหลว จะมีพฤติกรรมที่แตกต่างจากวัสดุนิวโทเนียนทั่ว ๆ ไป ลักษณะแตกต่างที่สำคัญที่สุดของพอลิเมอร์หลอมเหลวและสารละลายพอลิเมอร์จากวัสดุนิวโทเนียน คือ ความหนืดเปลี่ยนไปตามอัตราเฉือน (Shear rate dependent viscosity) โดยทั่วไปแล้วพอลิเมอร์หลอมเหลวและสารละลายพอลิเมอร์จะมีความหนืดลดลงเมื่อมีแรงเฉือนกระทำให้เกิดการไหล ลักษณะความหนืดแบบนี้เรียกว่าของไหลที่มีความเค้นลดลง (Shear thinning) หรือ ซูดพลาสติก (Pseudoplastic) ยกตัวอย่างเช่น พอลิเมอร์หลอมเหลวในเครื่องอัดรีดจะมีลักษณะการไหลแบบเฉือน (Shear flow) และความหนืดจะลดลงเมื่อมีอัตราการเฉือน (Shear rate) ที่สูงขึ้น นอกจากนี้ การไหลแบบเฉือนยังก่อให้เกิดความแตกต่างของความเค้นตั้งฉาก (Normal stress difference) ซึ่งมีผลต่อพฤติกรรมการไหลในทิศทางอื่นที่ไม่ใช่ทิศทางการไหลหลัก (Secondary flow) ซึ่งทำให้พอลิเมอร์มีความแตกต่างจากของไหลแบบนิวโทเนียน นอกจากนี้พอลิเมอร์ยังมีสมบัติความยืดหยุ่น (Elastic) อยู่ซึ่งทำให้เกิดพฤติกรรมการบวมพอง (Extrudate swell or die swell) เมื่อมีการไหลออกมาจากแม่พิมพ์อัดรีดขณะทำการขึ้นรูป พฤติกรรมที่แปลกประหลาดเหล่านี้เป็นเพียงแค่อตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นถึงความยากต่อการควบคุมกระบวนการผลิตในอุตสาหกรรมการขึ้นรูป ยังมีพฤติกรรมอื่น ๆ ที่น่าสนใจอีกมากมายซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิง<sup>10</sup>

การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเสียรูปของวัตถุในช่วงเวลาที่สนใจ โดยที่แรงนั้นจะทำให้วัตถุเกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวรและเกิดเป็นการไหลของสสารเป็นศาสตร์ที่เรียกว่า รีโอยี<sup>2</sup> (Rheology) หรือวิทยากระแส สมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุจะแสดงให้เห็นในสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitutive equation) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเหมือนในของแข็งตามกฎของฮุกส์ (Hooke's law) ดังแสดงในสมการที่ (8) ในขณะเดียวกัน ยังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความอัตราเครียดเหมือนในของเหลวแบบนิวโทเนียน (Newtonian) ดังแสดงในสมการที่ (4) ในแบบที่เป็นและไม่เป็นเชิงเส้นและมีพฤติกรรมที่ขึ้นอยู่กับเวลาอีกด้วย (Linear and nonlinear and time dependent properties) ดังจะเห็นได้ว่าสมบัติความยืดหยุ่นจะทำให้ของไหลคืนตัว (ไหลย้อนกลับ) หลังจากที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำซึ่งจะเรียกว่าของไหลมีความทรงจำ (Memory) ในบางครั้งจะเรียกของไหลที่สามารถคืนตัวได้หลังจากเอาแรงภายนอกออกนี้ว่าของไหลที่มีความทรงจำ (Memory fluid)

วัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการแสดงสมการแสดงพฤติกรรมทางวิทยากระแสของวัสดุวิสโคอีลาสติก ในเชิงวิศวกรรมโดยการเปรียบเทียบพฤติกรรมของวัสดุวิสโคอีลาสติกกับพฤติกรรมของสปริง (Spring) และตัวหน่วง (Dashpot) ที่ต่อขนาน (Parallel) หรือต่ออนุกรม (Series) กันหลาย ๆ ชุด



**Figure 1** illustrates material behavior under unsteady shear stress between two plates (a) velocities of Newtonian fluid flows between the plates as a function of time  $t$  (b) Distances of an elastic material under shear stress between the plates at initial time  $t_0$  and current time  $t$

### ของไหลนิวโทเนียนและของแข็งฮุกเกียน

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างพฤติกรรมของของไหลนิวโทเนียน (Newtonian fluids) และของแข็งฮุกเกียน (Hookean solids) โดยพิจารณาการเคลื่อนที่แบบเฉือนของของไหลนิวโทเนียนระหว่างระนาบ 2 ระนาบ Figure 1 (a) จากรูปจะเห็นว่าระนาบบนเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $V(t)$  ถ้าความหนืดของของไหลสูงมาก ๆ และระยะห่างระหว่างระนาบ  $h$  น้อย ๆ ดังนั้นรูปทรงความเร็ว  $v_1(x_2, t)$  จะแปรผันตรงกับระยะ  $x_2$  และมีสมการดังนี้

$$v_1(x_2, t) = \frac{V(t)}{h} x_2 = \dot{\gamma}_{21}(t) x_2 \quad (1)$$

โดย  $\dot{\gamma}_{21}$  คืออัตราความเร็วเฉือนบนพจน์ 21 ในเทนเซอร์อัตราความเร็วในสมการที่ (2),

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v}) + (\nabla \underline{v})^T \quad (2)$$

เมื่อ  $\nabla$  คือ เวกเตอร์เกรเดียนต์และ  $\underline{v}$  คือ เวกเตอร์ความเร็วของของไหล สมการที่ (2) เขียนอยู่ในรูปดัชนีบ่งชี้ (Index notation) คือ

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

เมื่อ  $v_i$  และ  $v_j$  เป็นความเร็วของก้อนของไหล (Fluid element) ในแนวแกน  $i$  และ  $j$  เมื่อ  $i, j = 1, 2, 3$  และ  $x_i$  และ  $x_j$  เป็นตำแหน่งของก้อนของไหลในแนวแกน  $i$  และ  $j$  ตามลำดับ โดยแกน  $x_1, x_2, x_3$  บางครั้งเรียกว่าแกน  $x, y, z$  ในระบบแกนพิกัดฉาก (Cartesian coordinates) ตามลำดับ ดังนั้นความเค้นเฉือนในของไหลนอนนิวโทเนียนคือ

$$\tau_{21}(t) = -\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\mu \dot{\gamma}_{21}(t) \quad (4)$$

นั่นคือความเค้นเฉือนที่เวลา  $t$  ใด ๆ จะแปรผันตรงกับเกรเดียนต์ความเร็วที่เวลา  $t$  เดียวกัน ต่อมาพิจารณา Figure 1 (b) แสดงการเคลื่อนที่ด้วยแรงเฉือนระหว่างระนาบ 2 ระนาบของของแข็งฮุกเกียน ที่เวลาเริ่มต้น  $t_0$  ของแข็งมีแต่ความเค้นภายในที่เท่ากันตลอด (Isotropic stress state) โดยไม่มีความเค้นมาจากภายนอกยกเว้นความดันบรรยากาศ ถ้าที่เวลา  $t$  ต่อมา ระนาบบนเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยเป็นระยะทาง

$U(t_0, t)$  ดังนั้นระยะทางที่เนื้อวัสดุภายในของแข็งเคลื่อนที่จะแปรผันตรงกับระยะความสูง  $x_2$  จึงมีสมการดังนี้

$$u_1(x_2, t_0, t) = \frac{U(t_0, t)}{h} x_2 = \gamma_{21}(t_0, t) x_2 \quad (5)$$

โดยความเครียดเฉือนบนพจน์ 21,  $\gamma_{21}(t_0, t)$ , ในเทนเซอร์ความเครียดกำหนดโดย

$$\underline{\underline{\gamma}} = (\nabla \underline{u}) + (\nabla \underline{u})^T \quad (6)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปดัชนีบ่งชี้ (Index notation) คือ

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (7)$$

สังเกตว่าเทนเซอร์ความเครียดจะขึ้นอยู่กับเวลา 2 ช่วงเวลา คือ เวลาตั้งต้น  $t_0$  และเวลาปัจจุบัน  $t$  โดยความเครียดที่เวลาเริ่มต้น  $\gamma_{21}(t_0, t_0) = 0$  ดังนั้นความเค้นเฉือนในของแข็งฮุกเกียน คือ

$$\tau_{21}(t) = -G \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -G \gamma_{21}(t_0, t) \quad (8)$$

โดย  $G$  คือ มอดูลัสยืดหยุ่น (Shear elastic modulus) สมการที่ (8) แสดงให้เห็นว่าความเค้นที่เวลา  $t$  ใด ๆ จะขึ้นอยู่กับความเครียดที่เวลา  $t$  และเวลาเริ่มต้น  $t_0$  จะเห็นได้ว่าของแข็งฮุกเกียนยังรับรู้สถานะเดิมที่เวลา  $t_0$  ได้อยู่ ผิดกับของไหลนิวโทเนียนที่ไม่ขึ้นอยู่กับสภาวะเดิมในอดีต ดังสูตรความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วซึ่งหาได้จากระยะทางต่อหน่วยเวลานั้นเอง

$$v_1(x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_1(x_2, t_0, t) \quad (9)$$

สมการที่ (9) สามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$u_1(x_2, t_0, t) = \int_0^t v_1(x_2, t') dt' \quad (10)$$

ในทำนองเดียวกันเทนเซอร์อัตราความเร็วและความเครียดมีความสัมพันธ์กันคือ

$$\dot{\gamma}_{21}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{21}(t_0, t) \quad (11)$$

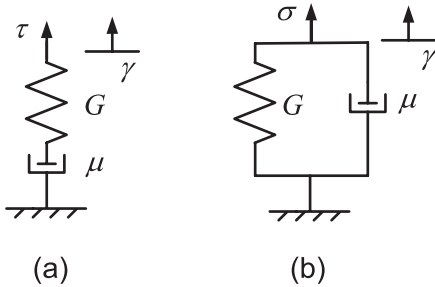
สมการที่ (11) สามารถอินทิเกรตได้เป็น

$$\gamma_{21}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \dot{\gamma}_{21}(t') dt' \tag{12}$$

เมื่อ  $t'$  คือ ตัวแปรของการอินทิเกรต (Dummy of integration) ซึ่งจะหายไปหลังจากแทนค่าเวลา  $t' = t_0$  และ  $t' = t$  ใด ๆ แล้ว

**วัสดุหยุ่นหนืด**

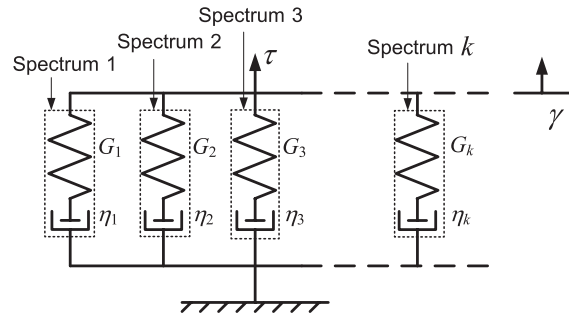
สมบัติหยุ่นหนืด (Viscoelastic property) สามารถแทนได้ด้วย การต่ออนุกรมและขนานระหว่างสปริง และตัวหน่วงสปริงแทนสมบัติยืดหยุ่น (Elastic property) ที่มีในของแข็ง ในขณะที่ตัวหน่วงแทนสมบัติความหนืดที่มีในของไหล โดยทั่วไปแบบจำลองที่ง่ายที่สุดที่นิยมใช้ในการบ่งบอกลักษณะเชิงกลที่แสดงสมบัติแบบหยุ่นหนืด มี 2 ชนิด คือ (1) แบบจำลองที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสปริงและตัวหน่วงต่ออนุกรมกันรวมเรียกว่า แบบจำลองของแมกซ์เวล (Maxwell model) (2) แบบจำลองที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสปริงและชิ้นส่วนตัวหน่วงต่อขนานกันรวมเรียกว่า แบบจำลองของวอยท์ (Voigt model) ดังแสดงใน Figure 2 โดย  $\mu$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวหน่วง (Dashpot coefficient),  $G$  คือ ค่ามอดูลัสยืดหยุ่น (Elastic modulus) ของสปริง,  $\gamma$  คือ ความเครียดของวัสดุ และ  $\sigma$  คือ ความเค้นของวัสดุ



**Figure 2** Simple viscoelastic models (a) Maxwell model and (b) Voigt model

สมบัติหยุ่นหนืดของของไหลสามารถแทนได้ด้วยแบบจำลองแมกซ์เวล ที่แสดงใน Figure 2 (a) ซึ่งเป็นการต่ออนุกรมระหว่างสปริงกับตัวหน่วง กล่าวคือ เมื่อมีแรงกดมากจะทำให้ของไหลเคลื่อนที่ไปได้ระยะหนึ่งแล้วเอาแรงออกของไหลจะเสียรูปไปอย่างถาวรแต่สมบัติหยุ่นหนืดจะทำให้ของไหลสามารถไหลย้อนกลับ (Elastic recoil) ได้เล็กน้อย และสมบัติหยุ่นหนืดของของแข็ง (หรือคล้ายของแข็งเนื่องจากของแข็งจะแทนได้ด้วยสปริงเพียงตัวเดียว) สามารถแทนได้ด้วยแบบจำลองวอยท์ ที่แสดงใน Figure 2 (b) ซึ่งเป็นการต่อขนาน

ระหว่างสปริงกับตัวหน่วง กล่าวคือ เมื่อมีแรงกดมากจะทำให้ของแข็งเสียรูปแต่ยังไม่ถึงจุดคราก (Yield point) เมื่อเอาแรงออกของแข็งจะกลับคืนสู่รูปร่างเดิม



**Figure 3** Generalized Maxwell model used for viscoelastic materials

**แบบจำลองแมกซ์เวล**

เนื่องจากเราสนใจสมบัติของพอลิเมอร์เหลวซึ่งเป็นของไหลดังนั้นพิจารณาแบบจำลองแมกซ์เวลใน Figure 2 (a) ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับการไหลแบบเนียนใน Figure 1 (a) จะเห็นได้ว่าในแบบจำลองแมกซ์เวลจะมีความเค้นเฉือนเท่ากันตลอด (ทั้งในสปริงและตัวหน่วง) และความเครียดรวม  $\gamma$  ของแบบจำลองแมกซ์เวลจะประกอบไปด้วยความเครียดของสปริง  $\gamma_{spr}$  และความเครียดของตัวหน่วง  $\gamma_{das}$

$$\gamma = \gamma_{spr} + \gamma_{das} \tag{13}$$

อนุพันธ์สมการ (13) เทียบกับเวลาจะได้อัตราความเครียด

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{spr} + \dot{\gamma}_{das} \tag{14}$$

โดยความเครียดของสปริง  $\gamma_{spr}$  จะแปรผันตรงกับ ความเค้นเฉือน (ในที่นี้สปริงออกแรงต้านการดึง)

$$\gamma_{spr} = -\frac{\tau}{G} \tag{15}$$

ดังนั้นอนุพันธ์สมการ (15) เทียบกับเวลาจะได้อัตราความเครียดของสปริง  $\dot{\gamma}_{spr}$

$$\dot{\gamma}_{spr} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{16}$$

ส่วนตัวหน่วงความเค้นที่เกิดขึ้นจะแปรผันตรงกับอัตราความเครียดของตัวหน่วง  $\dot{\gamma}_{das}$  (ในที่นี้ตัวหน่วงออกแรงต้านการดึง)

$$\dot{\gamma}_{des} = -\frac{\tau}{\mu} \tag{17}$$

แทนอัตราความเครียดของสปริง  $\dot{\gamma}_{spr}$  สมการ (16) และอัตราความเครียดของตัวหน่วง  $\dot{\gamma}_{das}$  สมการ (17) ลงในสมการอัตราเครียดรวม (14)

$$\frac{\tau}{\mu} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\dot{\gamma} \tag{18}$$

จัดรูปใหม่โดยคูณด้วยสัมประสิทธิ์ตัวหน่วง  $\mu$  ตลอดสมการ (18)

$$\tau + \frac{\mu}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\mu \dot{\gamma} \tag{19}$$

สมการ (19) มีชื่อเรียกว่า แบบจำลองพฤติกรรมการไหลแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwell constitutive equation) ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้าเป็นการเคลื่อนที่แบบคงตัวความเค้นเฉือนจะไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา ทำให้เทอมกลางหายไป และลดรูปกลายเป็นสมการพฤติกรรมการไหลแบบนิวโทเนียน แต่ถ้ามีการเคลื่อนที่อย่างฉับพลันเทอมความเค้นที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะทำให้สมการดังกล่าวเป็นสมการอนุพันธ์ของความเค้นเฉือนเทียบกับเวลา และมีผลของมอดูลัสยืดหยุ่น  $G$  ของซุก (Hookean solid) ในพฤติกรรมการไหลด้วย

เนื่องจากกฎของฮุก (Hooke's law) ใช้ได้กับการเสียรูปแค่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น (Infinitesimal displacement) ดังนั้นแบบจำลองของแมกซ์เวลล์จะใช้ได้กับการเสียรูปแค่เพียงเล็กน้อยเท่านั้นด้วย (Linear viscoelastic fluids) จากแบบจำลองแมกซ์เวลล์ถ้าแทนค่าความหนืดแบบนิวโทเนียน  $\mu$  ด้วยค่าความหนืดที่อัตราเครียดเป็นศูนย์  $\eta_0$  (Zero-shear-rate viscosity) ดังนั้น เมื่อกำหนดให้

$$\lambda \equiv \frac{\eta_0}{G} \tag{20}$$

เมื่อ  $\lambda$  มีหน่วยเป็นเวลาจึงเรียกว่า เวลาในการผ่อนคลาย (Relaxation time) สมการแบบจำลองของแมกซ์เวลล์ (19) จะกลายเป็นสมการแบบจำลองของแมกซ์เวลล์ที่เขียนอยู่ในรูปของเทนเซอร์ความเค้นและความเครียด

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{d\underline{\underline{\tau}}}{dt} = -\eta_0 \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \tag{21}$$

สมการ (21) เป็นสมการอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 1 (First

order, ordinary differential equation) เมื่อ  $\underline{\underline{\tau}}(t)$  เป็นฟังก์ชันของเวลา  $t$  เท่านั้น ดังนั้นผลเฉลยของเทนเซอร์ความเค้นเฉือนเทียบกับเวลา คือ<sup>10, 11</sup>

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = e^{-t/\lambda} \left[ \int \left( -\frac{\eta_0}{\lambda} \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t) \right) e^{t'/\lambda} dt' + \underline{\underline{K}} \right] \tag{22}$$

ใส่ลิมิตล่างและลิมิตบนบนเครื่องหมายอินทิเกรตแล้วจัดรูปจะได้

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = e^{-t/\lambda} \int_{-\infty}^t \left( -\frac{\eta_0}{\lambda} \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t') \right) e^{t'/\lambda} dt' + \underline{\underline{K}} e^{-t/\lambda} \tag{23}$$

ในเครื่องหมายอินทิเกรตเราแทน  $t$  ด้วย  $t'$  เพื่อป้องกันการสับสน ลิมิตล่างสามารถเลือกค่าใดก็ได้ในที่นี้ใช้ค่า  $-\infty$  ส่วน  $\underline{\underline{K}}$  เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ถ้าเราให้ค่าเทนเซอร์ความเค้นที่เวลา  $t = -\infty$  ไม่เป็นค่าอนันต์  $\underline{\underline{K}}$  ควรจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการทั่วไปแบบจำลองแมกซ์เวลล์สมการที่ (23) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = -\int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \right\} \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t') dt' \tag{24}$$

ค่าที่อยู่ในวงเล็บปีกกา เรียกว่า มอดูลัสผ่อนคลาย (Relaxation modulus) สำหรับของไหลแบบแมกซ์เวลล์จากสมการ (24) จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์ความเค้นที่เวลาปัจจุบัน  $t$  นอกจากจะขึ้นอยู่กับเทนเซอร์อัตราเครียดที่เวลาปัจจุบัน  $t$  ยังขึ้นอยู่กับว่าเทนเซอร์อัตราเครียดที่เวลา  $t'$  ที่ผ่านมาแล้วด้วย (เกิดความเครียดสะสม) และยังคงด้วยมอดูลัสผ่อนคลายซึ่งมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเวลามากขึ้นด้วย (Relaxation modulus decays exponentially with time) ซึ่งจะเห็นได้ว่าของไหลแบบแมกซ์เวลล์มีความจำที่เลือนลาง (Fading memory) กล่าวคือ ของไหลแบบแมกซ์เวลล์จะจำการเสียรูปในเวลาที่จะผ่านมาไม่นานไม่ได้เป็นอย่างดีแต่จะจำการเสียรูปในเวลาที่ผ่านมาแล้วได้น้อย นั่นหมายความว่า ความเค้นในปัจจุบันที่เวลา  $t$  จะขึ้นอยู่กับอัตราเครียดในอดีตจนถึงปัจจุบัน  $-\infty < t' \leq t$  ถ้าเรากำหนดให้

$$\frac{\partial \underline{\underline{\gamma}}}{\partial t} \equiv \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t') \tag{25}$$

และ

$$\underline{\underline{\gamma}}(t, t') = \int_{t'}^t \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t'') dt'' \tag{26}$$

แล้วทำการอินทิเกรตเฉพาะส่วน (Integration by part) สมการ (24) จะได้

$$\underline{\tau}(t) = + \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda^2} e^{-(t-t')/\lambda} \right\} \underline{\dot{\gamma}}(t, t') dt' \quad (27)$$

สมการรูปทั่วไปของไหลแบบแมกซ์เวลล์ในสมการ (21)

(24) และ (27) ใช้ได้เหมือน ๆ กันถ้าอัตราเครียด  $\dot{\gamma}$  ที่เวลา  $t = -\infty$  ไม่เป็นค่าอนันต์ สมการ (24) เขียนเหมือนกับสมการนิวโทเนียน และสมการ (27) เขียนเหมือนกับสมการฮุกเกียน

### แบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์

พิจารณาแบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์ที่ใช้แทนลักษณะทางกายภาพของของไหลหนืด ดึงแสดงใน Figure 3 เป็นการต่อขนานกันของแบบจำลองแมกซ์เวลล์ไม่จำกัดจำนวนสเปกตรัม พิจารณาสเปกตรัมที่  $k$  ซึ่งจะมีค่าคงที่ของสปริง  $G_k$  และมีค่าคงที่ของตัวหน่วง  $\eta_k$  มีค่าความเค้นในแต่ละสเปกตรัม  $k$  คือ  $\tau_k$  ดังนั้นกำหนดให้มีค่าคงที่ของเวลาในสเปกตรัม  $k$  คือ  $\lambda_k$  ด้วย โดยความเค้นรวมของแบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์จะเท่ากับผลรวมของความเค้นในแต่ละสเปกตรัม

$$\underline{\tau}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{=k}(t) \quad (28)$$

โดยในสเปกตรัม  $k$  มีสมการแมกซ์เวลล์

$$\tau_{=k} + \lambda_k \frac{\partial \tau_{=k}}{\partial t} = -\eta_k \dot{\underline{\gamma}} \quad (29)$$

และ

$$\lambda_k = \frac{\eta_k}{G_k} \quad (30)$$

สังเกตว่าทุกสเปกตรัมจะมีอัตราเครียดเท่ากันคือ  $\dot{\underline{\gamma}}$  คล้ายกับการผลเฉลยของสมการ (21) สมการ (29) มีผลเฉลยคือ<sup>10, 11</sup>

$$\underline{\tau}(t) = - \int_{-\infty}^t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k} e^{-(t-t')/\lambda_k} \right\} \dot{\underline{\gamma}}(t') dt' \quad (31)$$

หรือ

$$\underline{\tau}(t) = + \int_{-\infty}^t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k^2} e^{-(t-t')/\lambda_k} \right\} \underline{\dot{\gamma}}(t, t') dt' \quad (32)$$

เมื่อ  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots$  โดยค่าที่อยู่ในวงเล็บปีกกาในสมการ (31) เรียกว่า มอดูลัสผ่อนคลาย และค่าที่อยู่ในวงเล็บปีกกาในสมการ (32) เรียกว่า ฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) ของแบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์

แบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์สามารถใช้แสดงพฤติกรรมของสารละลายพอลิเมอร์ และพอลิเมอร์หลอมเหลวได้เป็นอย่างดี แต่ค่าคงที่  $\eta_k$  และ  $\lambda_k$  ที่มีเป็นจำนวนมากซึ่งหมายถึงแทนด้วยสปริงและตัวหน่วงใน Figure 3 นี้ อาจจะทำให้แบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์ใช้งานได้ยากขึ้น ดังนั้นสปริงส์ (Spriggs) ได้ใช้ทฤษฎีทางความสัมพันธ์ของโมเลกุล (Molecular theory) ทำการพิสูจน์ได้ว่า  $\eta_k$  และ  $\lambda_k$  มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกัน และ  $\lambda_k \sim 1/k^2$  เมื่อ  $k$  มีค่ามากขึ้น ดังนั้นเราสามารถลดจำนวนตัวแปรทั้งหมดลงเหลือ 3 ตัวเท่านั้น ( $\eta_0, \lambda, \alpha$ ) โดยกำหนดให้

$$\eta_k = \frac{\eta_0 \lambda_k}{\sum_k \lambda_k} \quad (33)$$

โดย

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k^\alpha} \quad (34)$$

โดย  $\alpha$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงส์ (Spriggs coefficient) ซึ่ง  $2 \leq \alpha \leq 4$  สำหรับพอลิเมอร์เหลว (Polymer solutions) และพอลิเมอร์หลอมเหลว<sup>9, 10</sup> (Polymer melts)

### แบบจำลองเจฟฟรีส์

สมการแมกซ์เวลล์ในสมการที่ (21) มีความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์ความเค้น  $\underline{\tau}$  และเทนเซอร์อัตราเครียด  $\dot{\underline{\gamma}}$  เป็นแบบเชิงเส้น สามารถต่อเติมสมการเพื่อปรับปรุงสมการให้ใช้งานได้มากยิ่งขึ้น และยังคงมีความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้นได้อีกหลาย ๆ วิธี วิธีการหนึ่ง คือ การใส่อนุพันธ์อัตราเครียดเพิ่มลงไปในสมการทำให้ได้สมการแสดงพฤติกรรมอีกรูปดังนี้

$$\underline{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial t} = -\eta_0 \left( \dot{\underline{\gamma}} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\underline{\gamma}}}{\partial t} \right) \quad (35)$$

เรียกสมการ (35) ว่า แบบจำลองของเจฟฟรีส์ (Jeffreys model) โดย  $\lambda_1$  คือ เวลาผ่อนคลาย (Relaxation time) และ  $\lambda_2$  คือ เวลาหน่วง (Retardation time) แบบจำลองของเจฟฟรีส์สามารถอินทิเกรตได้เช่นกัน เนื่องจากเป็นสมการ

อนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 โดยถ้า  $\underline{\tau}$  มีค่าอยู่จริง (Finite value) ที่เวลา  $t = -\infty$  (ซึ่งทำให้  $\dot{\gamma}$  และ  $\partial \dot{\gamma} / \partial t$  มีค่าอยู่จริงที่เวลา  $t = -\infty$  ด้วย) ดังนั้น ผลเฉลยของสมการที่ (35) คือ

$$\underline{\tau}(t) = -\int_{-\infty}^t \frac{\eta_0}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{-(t-t')/\lambda_1} \dot{\gamma}(t') dt' - \frac{\eta_0 \lambda_2}{\lambda_1} \dot{\gamma}(t) \tag{36}$$

โดย  $\lambda_1 > \lambda_2$  จากนั้นจัดรูปสมการ (36) ให้อยู่ในรูปเดียวกันกับสมการ (24) ซึ่งต้องใช้ฟังก์ชันเดลต้าของไดแรค<sup>11,17,18</sup> (Dirac delta function)

$$\underline{\tau}(t) = -\int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{-(t-t')/\lambda_1} + 2 \frac{\eta_0 \lambda_2}{\lambda_1} \delta(t-t') \right\} \dot{\gamma}(t') dt' \tag{37}$$

ค่าที่อยู่ในวงเล็บปีกกาเรียกว่ามอดูลัสพ่อนคลาย ของแบบจำลองของเจ็ฟฟรีส์ อินทรีเกรตเฉพาะส่วนสมการ (37) จะได้

$$\underline{\tau}(t) = +\int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1^2} \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{-(t-t')/\lambda_1} + 2 \frac{\eta_0 \lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t-t') \right\} \gamma(t, t') dt' \tag{38}$$

โดยค่าที่อยู่ในวงเล็บปีกกาเรียกว่าฟังก์ชันความทรงจำของแบบจำลองของเจ็ฟฟรีส์ เช่นเดียวกับแบบจำลองแมกซ์เวลล์ เราสามารถใช้ทฤษฎีของสปริงส์ เพื่อลดจำนวนตัวแปรทั้งหมดลงเหลือ 4 ตัว ( $\eta_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$ ) ได้ด้วยการแทน

$$\eta_0 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \tag{39}$$

$$\lambda_1 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k^\alpha} \tag{40}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k^\alpha} \tag{41}$$

ลงในสมการที่ (35) เมื่อ  $\eta_k$  และ  $\lambda_k$  นิยามในสมการ (33) และ (34)

**สมการทั่วไปของวัสดุหยุ่นหนืดเชิงเส้น**

จากแบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวลล์ (31) และ (32) และแบบจำลองของเจ็ฟฟรีส์ (37) และ (38) จะเห็นได้ว่าเป็นการอินทิเกรตมอดูลัสพ่อนคลายคูณกับเทนเซอร์อัตราเครียดตั้งแต่อดีตจนถึงเวลาปัจจุบัน ดังนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้คือ

$$\underline{\tau}(t) = -\int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \tag{42}$$

และ

$$\underline{\tau}(t) = +\int_{-\infty}^t M(t-t') \gamma(t, t') dt' \tag{43}$$

โดย  $G(t-t')$  คือมอดูลัสพ่อนคลาย และ  $M(t-t')$  คือฟังก์ชันความทรงจำ

$$M(t-t') = \frac{\partial G(t-t')}{\partial t'} \tag{44}$$

สมการ (42) และ (43) เรียกว่าสมการทั่วไปของสมบัติหยุ่นหนืดเชิงเส้น (General linear viscoelastic model) และทั้ง 2 สมการเป็นจุดเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณสมบัติหยุ่นหนืดต่อการประยุกต์ใช้สมการทั้ง 2 สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ในบทที่ 5 ของ<sup>9</sup>

**ข้อจำกัด**

บทความนี้แสดงให้เห็นว่าสมการของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไป ที่สร้างขึ้นมาจากแนวคิดของแมกซ์เวลล์ด้วยการต่ออนุกรมระหว่างสปริงและตัวหน่วงแล้วนำมาต่อขนานกันหลายๆ ชุดดังแสดงใน Figure 3 สามารถใช้แทนพฤติกรรมของเหลวพอลิเมอร์ได้เป็นอย่างดี แต่อย่างไรก็ตามสมการของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปก็ยังมีข้อจำกัดในการใช้งานคือ

1. ความหนืดที่ได้จากสมการของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปจะเป็นค่าคงที่และเป็นค่าความหนืดที่ความเครียดเป็นศูนย์ (Zero shear viscosity) หรือความหนืดตั้งต้น  $\eta_0$  แต่ของไหลทั่วไปค่าความหนืดจะขึ้นอยู่กับค่าอัตราเครียดเนื่อง  $\dot{\gamma}$  (Shear rate)
2. เนื่องจากเทนเซอร์ความเค้นในสมการของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปจะแปรผันตรงกับเทนเซอร์อัตราเครียด ดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความเค้นตั้งฉากลำดับที่ 1 และ 2 ( $\Psi_1, \Psi_2$ ) ได้
3. สมการของไหลหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั่วไปใช้ได้กับอัตราเครียด  $\dot{\gamma}$  ต่ำ ๆ เท่านั้น

4. สมการของไหลหนืดเชิงเส้นทั่วไปใช้ได้กับของไหลที่มีแกนผูกติดไปกับภาชนะที่ใช้ใส่ของไหลเท่านั้น (Frame dependent or non-objective) ไม่ได้เลื่อนและหมุนไปกับบอภาคของไหล (Translated and rotated frame) ทำให้ความเครียดที่เกิดขึ้นจริงแตกต่างจากความเครียดที่เห็นโดยผู้สังเกตการณ์ ยกตัวอย่างเช่นผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนล้อรถยนต์ในขณะที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และหมุนไปพร้อมกับล้อ (Translated and rotated frame) จะเห็นจุดบนล้อรถยนต์อยู่นิ่ง ในขณะที่ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนรถยนต์ในขณะที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (Translated frame) จะเห็นจุดบนล้อรถยนต์วนรอบแกนล้อเป็นวงกลมเท่านั้น แต่ผู้สังเกตการณ์ที่ยืนอยู่บนถนน (Inertia frame or fixed frame) จะเห็นจุดเดียวกันบนล้อรถยนต์หมุนวนเป็นเกลียวกันหอยเป็นต้น

การที่สมการของไหลหนืดเชิงเส้นทั่วไปขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Frame dependent or non-objective) นั้นหมายความว่าผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนล้อรถยนต์ (Translated and rotated frame) จะเห็นการเคลื่อนที่ของของไหลแตกต่างไปจากผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนแกนเฉื่อยหรือแกนหลัก (Inertia frame or fixed frame) นั่นเอง

### บทสรุป

ของไหลหนืดเชิงเส้นทั่วไป ที่ได้จากแนวคิดของแมกซ์เวลล์แสดงในรูปที่ 3 สามารถใช้แทนพฤติกรรมหนืดของพอลิเมอร์ ได้เป็นอย่างดีแต่อย่างไรก็ตามสมการของไหลหนืดเชิงเส้นทั่วไปก็ยังมีข้อจำกัดในการใช้งานอยู่ กล่าวคือสมการของไหลหนืดเชิงเส้นทั่วไปขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Frame dependent or non-objective) ทำให้ใช้ได้กับของไหลที่มีอัตราเครียด  $\dot{\gamma}$  ต่ำ ๆ เท่านั้น อีกทั้งไม่สามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความเค้นตั้งฉากลำดับที่ 1 และ 2 ( $\Psi_1, \Psi_2$ ) ได้และให้ค่าความหนืดเป็นค่าคงที่ที่อัตราเฉือนเป็นศูนย์  $\eta_0$  (Zero-shear-rate viscosity) แต่ของไหลทั่วไปค่าความหนืดจะขึ้นอยู่กับอัตราเครียดเฉือน  $\dot{\gamma}$  (Shear rate) อีกทั้งได้กล่าวถึงทฤษฎีของสปริคส์ ที่ยังคงจำนวนตัวแปรเท่ากับสเปกตรัมเดี่ยวบวกกับค่าสัมประสิทธิ์ของสปริคส์  $\alpha$  แต่มีผลเทียบเท่ากับจำนวนสเปกตรัมของแบบจำลองจำนวนอนันต์ชุด

### กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พวงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอำนวยความสะดวกนี้

### เอกสารอ้างอิง

1. Ferry JD. *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley and Sons: New York; 1979. P. 99, 154
2. Tanner RI. *Engineering Rheology*. 2<sup>nd</sup> ed. Oxford University Press: New York; 2002.
3. Cengel YA., Cimbala JM. *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications*. International Edition. McGraw Hill: New York; 2006.
4. Munson BR, Young DF, and Okiishi TH. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 4<sup>th</sup> ed. John Wiley and Sons: New York; 2002.
5. Young RJ, Lovell PA. *Introduction to polymers*. 2<sup>nd</sup> ed. Chapman & Hall: New York; 1991.
6. Haddad YM. *Viscoelasticity of Engineering Materials*. Chapman and Hall: New York; 1995.
7. Kolutawong C. Rheology Property Testing of Shear Flows. *Journal of Science Ladkrabang*, 2018; **27**(2): 44-64. (in Thai)
8. Kolutawong, C.. Rheology of Generalized Newtonian Fluids. *KKU Science Journal*, (2019); 47(3): 392-401. (in Thai)
9. Bird RB, Armstrong RC, Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley and Sons: New York; 1987. P. 255, 262.
10. Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN. *Transport Phenomena*. 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley and Son: New York; 2002. P. 241, 246, 852.
11. Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN, Klingenberg, D.J. *Introductory Transport Phenomena*. Wiley: New York; 2015. P. 23, 279, 729.
12. Morrison FA. *Understanding Rheology*. Oxford University Press: New York; 2001. P. 267.
13. Shaw MT, MacKnight WJ. *Introduction to Polymer Viscoelasticity*. 3<sup>rd</sup> ed. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc.: New Jersey; 2005.
14. Bird RB, Armstrong RC, Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics*, 1<sup>st</sup> ed. John Wiley and Sons: New York; 1977. P. 280.



15. Murphy GM. *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. Van Nostrand: Princeton, NJ; 1960.
16. Tuma JJ. *Engineering Mathematics Handbook*. 3<sup>rd</sup> ed. McGraw-Hill: New York; 1987.
17. Lighthill MJ. *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. Cambridge University Press; 1964. P.10.
18. Korn GA, Korn TM. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill: New York; 1968. P.876.
19. Saengow C, Giacomin AJ. Exact Solution for Oscillatory Shear Sweep Behaviors of Complex Fluids from the Oldroyd 8-Constant Framework. *Physics of Fluids*, 2018; **30**: 030703.
20. Macosko CW. *Rheology Principles, Measurements and Applications*. Wiley-VCH: New York; 1994. P. 111-7