เซตบนวางนัยทั่วไปและส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE

On generalized upper sets and generalized terminal sections in BE-algebras

อรรถพล ภูมิลา[1*], ขจรศักดิ์ เนียมน่วม[2], รัตนา คำตุ้ม[3], สุพรรณนิกา บุญอาจ[4]

Attaphol Pumila[1*], Khachonsak Niamnuam[2], Ruttana Khamtum[3], Supannika Boonard[4]

Received: 31 January 2017 ; Accepted: 2 May 2017

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของการศึกษาในครั้งนี้คือการให้นิยามและหาสมบัติของส่วนขั้ววางนัยทั่วไปใน พีชคณิต-BE จากนิยามของส่วนขั้ววางนัยทั่วไปสามารถหาความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเซตบนวางนัยทั่วไป ตัวกรองและไอดีลใน พีชคณิต-BE อีกทั้งยังได้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองและไอดีลใน พีชคณิต-BEแจกแจงในตัว

คำสำคัญ : พีชคณิต-BE เซตบนวางนัยทั่วไป ส่วนขั้ววางนัยทั่วไป สลับที่ แจกแจงในตัว ตัวกรอง ไอดีล

Abstract

The aim of this paper is to introduce the notion of generalized terminal sections in BE-algebras and investigate their properties. Furthermore, these sets are considered in commutative and self distributive BE-algebras. Finally, we provide the relationship between self distributive and ideal and the relationship between self distributive and filter.

Keywords : BE-algebra, generalized upper set, generalized terminal section, commutative, self distributive, filter, ideal

บทนำ

ในปี 2008 Ahn & So ได้เผยแพร่งานวิจัยเรื่อง *ไอดีลและเซตบนในพีชคณิต-BE (on ideal and upper set in BE-algebra)* ซึ่งได้ให้นิยามของไอดีลและเซตบนใน พีชคณิต-BE และให้แนวคิดว่า เซตบนของสมาชิกใดๆ ในพีชคณิต-BE จะเป็นไอดีลของพีชคณิต-BE และต่อมาในปี 2009 พวกเขาได้เผยแพร่งานวิจัยเรื่อง *เซตบนวางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE (on generalized upper sets in BE-algebras)* และได้ให้สมบัติเฉพาะของเซตบนวางนัยทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับไอดีลใน พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว

ในปี 2012 Ahn,Kim & Ko ได้เผยแพร่งานวิจัยเรื่อง *ตัวกรองในพีชคณิต-BE สลับที่ (filter in commutative BE-algebras)* ซึ่งได้ให้นิยามของส่วนขั้วของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BEและได้สมบัติบางประการของส่วนขั้วของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BE

การศึกษาในครั้งนี้เราจะนิยามส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE ขยายแนวคิดเรื่องเซตบนวางนัยทั่วไป และแสดงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองและไอดีลในพีชคณิต-BE

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 1[1] ให้ X ไม่เป็นเซตว่างและ "$*$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X;*,1)$ ว่า พีชคณิต-BE (BE-algebra) ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(BE1) $x*x=1$ สำหรับทุก ๆ $x\in X$

(BE2) $x*1=1$ สำหรับทุก ๆ $x\in X$

(BE3) $1*x=x$ สำหรับทุก ๆ $x\in X$

(BE4) $x*(y*z)=y*(x*z)$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z\in X$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกให้ X แทน $(X;*,1)$ จนกว่าจะกำหนดให้เป็นอย่างอื่น

[1] *อาจารย์ประจำหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม จังหวัดพิษณุโลก 65000*

[2,3,4] *นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม จังหวัดพิษณุโลก*

[1] *Lecturer, Program in Mathematics, Faculty of Science and Technology Pibulsongkram Rajbhat University, Phitsanulok*

[2,3,4] *Undergraduate Students, Program in Mathematics, Faculty of Science and Technology Pibulsongkram Rajbhat University, Phitsanulok*

[*] *Corresponding author: Attaphol Pumila, Faculty of Science and Technology Pibulsongkram Rajbhat University, Phitsanulok 65000, atpa@psru.ac.th*

บทนิยาม 2[1] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แล้ว $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 1$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 3[1] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X แล้ว F เป็นตัวกรอง (filter) ของ X ถ้า

(F1) $1 \in F$

(F2) ถ้า $x \in F$ และ $x * y \in F$ แล้ว $y \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 4[1] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE จะเรียก X ว่า พีชคณิต-BEแจกแจงในตัว (self distributive BE-algebra) ถ้า $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

บทนิยาม 5[5] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก S ว่า พีชคณิตย่อย (subalgebra) ของ X ถ้า $x * y \in S$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in S$

บทตั้ง 6[5] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นตัวกรองของ X แล้ว F เป็นพีชคณิตย่อยของ X

บทนิยาม 7[2] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ I เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก I ว่า ไอดีล (ideal) ของ X ถ้า

(I1) สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และ $a \in I$ แล้ว $x * a \in I$ กล่าวคือ $X * I \subseteq I$

(I2) สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และ $a, b \in I$ แล้ว $(a * (b * x)) * x \in I$

บทตั้ง 8[2] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ I เป็นเซตย่อยของ X ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

(I3) $1 \in I$

(I4) ถ้า $x * (y * z) \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x * z \in I$ สำหรับ $x, y, z \in X$

จะได้ว่า ถ้า $a \in I$ และ $a \leq x$ แล้ว $x \in I$

บทนิยาม 9[7] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก F ว่า ตัวกรองมีเงื่อนไข (implicative filter) ของ X ถ้า

(i) $1 \in F$

(ii) $x * (y * z) \in F$ และ $x * y \in F$ แล้ว $x * z \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

ประพจน์ 10[7] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE สำหรับทุก ๆ ตัวกรองมีเงื่อนไขจะเป็นตัวกรองของ X

บทนิยาม 11[7] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X จะเรียก F ว่า ตัวกรองมีเงื่อนไขบวก (positive implicative filter) ของ X ถ้า

(i) $1 \in F$

(ii) $z * ((x * y) * x) \in F$ และ $z \in F$ แล้ว $x \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

บทนิยาม 12[3] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE จะเรียก X ว่า พีชคณิต-BE สลับที่ (commutative BE-algebra) ถ้า $(x * y) * y = (y * x) * x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 13[3] ให้ X ไม่เป็นเซตว่างและ "$*$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X;*)$ ว่า พีชคณิตมีเงื่อนไข (implication algebra) ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(IM1) $(x * y) * x = x$

(IM2) $(x * y) * y = (y * x) * x$

(IM3) $x * (y * z) = y * (x * z)$

สำหรับทุก ๆ. $x, y, z \in X$

บทนิยาม 14 ให้ X เป็นพีชคณิต-BE จะเรียก X ว่า พีชคณิต-BE สลับที่แจกแจงในตัว ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัวและพีชคณิต-BE สลับที่

บทแทรก 15[8] $(X;*)$ เป็นพีชคณิต-BE มีเงื่อนไข ก็ต่อเมื่อ $(X;*)$ เป็น พีชคณิต-BE สลับที่แจกแจงในตัว

บทนิยาม 16[1] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $A(x, y) := \{z \in X \mid x * (y * z) = 1\}$ จะเรียก $A(x, y)$ ว่า เซตบน (upper set) ของ X และ y

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 16 จะได้ว่า $1, x, y \in A(x, y)$

บทนิยาม 17[6] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE สำหรับทุก ๆ $x \in X$ กำหนดให้ $A(x) := \{z \in X \mid x \leq z\}$,

เราจะเรียก $A(x)$ ว่า ส่วนขั้ว (terminal section) ของ X

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 17 จะได้ว่า $1, x \in A(x)$

ผลการดำเนินการ

จากการศึกษาเซตบนใน พีชคณิต-BE และส่วนขั้วใน พีชคณิต-BE ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างเซตบน ส่วนขั้ว ตัวกรอง และไอดีลใน พีชคณิต-BE และ พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว

ต่อมามีการขยายแนวคิดของเซตบนเป็นเซตบนวางนัยทั่วไป[4] โดยกำหนดให้

$$u^n * v = \underbrace{u * (u * (u * \cdots * (u}_{n-term} * v) \cdots)$$

และในที่นี้จะขยายแนวคิดของส่วนขั้วเป็นส่วนขั้ววางนัยทั่วไป โดยจะนิยามส่วนขั้ววางนัยทั่วไปดังนี้

บทนิยาม 18[4] ให้ X เป็น พีชคณิต-BE สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $A_n(x, y) := \{z \in X \mid x^n * (y * z) = 1\}$ จะเรียก $A_n(x, y)$ ว่า เซตบนวางนัยทั่วไป (generalized upper set) ของ X และ y

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 18 จะได้ว่า $1, x, y \in A_n(x, y)$

บทนิยาม 19 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับกำหนดให้

$A_n(x) := \{z \in X \mid x^n * z = 1\}$ จะเรียก $A_n(x)$ ว่า ส่วนขั้วางนัยทั่วไป (generalized terminal section) ของ X

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 19 จะได้ว่า $1, x \in A_n(x)$

ตัวอย่าง 20 ให้ $X := \{1, a, b, c, d\}$ ซึ่งมีการดำเนินการทวิภาค "$*$" บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	1	1	b	c	d
b	1	a	1	c	c
c	1	1	b	1	b
d	1	1	1	1	1

จะเห็นได้โดยชัดเจนว่า $(X;*,1)$ เป็น พีชคณิต-BE

ให้ P(n) แทน $1^n * 1 = 1$ ทุก ๆ $n \in N$ จะได้ $1^1 * 1 = 1 * 1 = 1$ $\therefore$ P(1) เป็นจริง

สมมติให้ P(k) เป็นจริง จะได้ว่า $1^k * 1 = 1$

ดังนั้น $1 * (1^k * 1) = 1 * 1 = 1$

แต่ $1 * (1^k * 1) = 1 * (\underbrace{1 * (\ldots * (1}_{k-term} * 1)\ldots)$

$= \underbrace{1 * (1 * (\ldots * (1}_{(k+1)-term} * 1)\ldots)$

$= 1^{k+1} * 1$

$\therefore 1^{k+1} * 1 = 1 * (1^k * 1) = 1$

จึงได้ว่า P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือ $1^n * 1 = 1$ ทุก ๆ $n \in N$ จะได้ว่า $1 \in A_n(1)$

แต่ $1^1 * a = (1 * a) = a \neq 1$

$1^1 * b = (1 * b) = b \neq 1$

$1^1 * c = (1 * c) = c \neq 1$

$1^1 * d = (1 * d) = d \neq 1$

$\therefore a, b, c, d \notin A_n(1) = \{1\}$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า $A_n(a) = \{1, a\}$, $A_n(b) = \{1, b\}$, $A_n(c) = \{1, a, c\}$ และ $A_n(d) = X$

ตัวอย่าง 21 ให้ $X := \{1, a, b, c\}$ ซึ่งมีการดำเนินการทวิภาค "$*$" บนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จะเห็นได้โดยชัดเจนว่า $(X;*,1)$ เป็น พีชคณิต-BE

จาก $A(b) = \{x \in X \mid b \leq x\}$ จะได้ว่า $A(b) = \{x \in X \mid b * x = 1\}$

กรณี $x = 1$ จะได้ว่า $b * 1 = 1$ ดังนั้น $1 \in A(b)$

กรณี $x = a$ จะได้ว่า $b * a = 1$ ดังนั้น $a \in A(b)$

กรณี $x = b$ จะได้ว่า $b * b = 1$ ดังนั้น $b \in A(b)$

กรณี $x = c$ จะได้ว่า $b * c = a$ ดังนั้น $c \notin A(b)$

นั่นคือ $A(b) = \{1, a, b\}$

จาก $A_n(b) = \{x \in X \mid b^n * x = 1\}$

ให้ P(n) แทน $b^n * 1 = 1$ ทุก ๆ $n \in N$

จะได้ว่า $b^1 * 1 = 1$ ดังนั้น P(1) เป็นจริง

สมมติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือ $b^k * 1 = 1$

จะได้ว่า $b * (b^k * 1) = b * 1 = 1$

แต่ $b * (b^k * 1) = b * (\underbrace{b * (\ldots * (b}_{k-term} * 1)\ldots)$

$= \underbrace{b * (b * (\ldots * (b}_{(k+1)-term} * 1)\ldots)$

$= b^{k+1} * 1$

$\therefore b^{k+1} * 1 = 1$

จึงได้ว่า P(k+1) เป็นจริง นั่นคือ $b^n * 1 = 1$ ทุก ๆ $n \in N$ ดังนั้น $1 \in A_n(b)$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $a, b, c \in A_n(b)$

$\therefore A_n(b) = \{1, a, b, c\}$

จะเห็นได้ว่า $A(b) \neq A_n(b), n \geq 2$

ตัวอย่าง 22 ให้ $X = \{1, a, b, c, d\}$ ซึ่งมีการดำเนินการทวิภาค "$*$" บนเซต X ดังตารางในตัวอย่าง 20

จากตารางจะได้ว่า $A_n(1,1) = \{1\}$,

$A_n(1, a) = A_n(a, 1) = A_n(a, a) = \{1, a\}$

$A_n(a, b) = \{1, a, b\}$

$A_n(1, b) = A_n(b, 1) = A_n(b, b) = \{1, b\}$,

$A_n(1, c) = A_n(a, c) = A_n(c, 1)$

$= A_n(a, c) = A_n(c, c) = \{1, a, c\}$

$A_n(b,a)=\{1,a,b\}$ และ $A_n(x,d)=A_n(d,x)=X$
จากตัวอย่าง 20 ทราบว่า $A_n(1)=\{1\}$,
$A_n(a)=\{1,a\}$, $A_n(b)=\{1,b\}$, $A_n(c)=\{1,a,c\}$
และ $A_n(d)=\{1,a,b,c,d\}$
พิจารณา $A_n(1)=\{1\}$ แต่ $A_n(1,a)=\{1,a\}$,
$A_n(1,b)=\{1,b\}$, $A_n(1,c)=\{1,c\}$
จะได้ว่า $A_n(1)\neq A_n(1,x)$
$A_n(a)=\{1,a\}$ แต่ $A_n(a,a)=\{1,a\}$,
$A_n(a,b)=\{1,a,b\}$, $A_n(a,c)=\{1,a,c\}$
จะได้ว่า $A_n(a)\neq A_n(a,x)$
$A_n(b)=\{1,b\}$ แต่ $A_n(b,a)=\{1,a,b\}$,
$A_n(b,b)=\{1,b\}$, $A_n(b,c)=\{1,a,b,c,d\}$
จะได้ว่า $A_n(b)\neq A_n(b,x)$
$A_n(c)=\{1,a,c\}$ แต่ $A_n(c,a)=\{1,a,b\}$,
$A_n(c,b)=\{1,a,b,c,d\}$, $A_n(c,c)=\{1,a,c\}$
จะได้ว่า $A_n(c)\neq A_n(c,x)$
ดังนั้น $A_n(x)\subseteq A_n(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x,y\in X$

ทฤษฎีบท 23 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE ถ้า $x,y\in X$ แล้ว $A_n(x)\subseteq A_n(x,y)$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $x,y\in X$ และ $z\in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n*z=1$ โดย (BE4) และ (BE2) ทำให้ได้ว่า

$x^n*(y*z)=y*(x^n*z)=y*1=1$

ดังนั้น $z\in A_n(x,y)$ นั่นคือ $A_n(x)\subseteq A_n(x,y)$ □

ทฤษฎีบท 24 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE ถ้า $x,y\in X$ แล้ว $A_n(x)=\bigcap_{x\,y\in X} A_n(x,y)$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $x,y\in X$

เนื่องจาก $A_n(x)\subseteq A_n(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $n\in N$ และ $x,y\in X$

ดังนั้น $A_n(x)\subseteq \bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)\subseteq A_n(x)$

ให้ $w\in \bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)$ จะได้ว่า $w\in A_n(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $y\in X$

ดังนั้น $w\in A_n(x,1)$ พิจารณา $1=x^n*(1*w)=x^n*w$ จะได้ว่า $w\in A_n(x)$

นั่นคือ $\bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)\subseteq A_n(x)$

สามารถสรุปได้ว่า $A_n(x)=\bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)$ □

บทแทรก 25 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE ถ้า $x,y\in X$ แล้ว $A_n(x,1)=\bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $x,y\in X$

พิจารณา $A_n(x)=\{z\in X\mid x^n*z=1\}$

$=\{z\in X\mid x^n*(1*z)=1\}$

$=A_n(x,1)$

จากทฤษฎีบท 24 ทราบว่า $A_n(x)=\bigcap_{x\,y\in X} A_n(x,y)$

ดังนั้น $A_n(x,1)=\bigcap_{x,y\in X} A_n(x,y)$ □

ทฤษฎีบท 26 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ $a\in X$ แล้วสมบัติต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) $a^n\le x$

(ii) $X=A_n(a,x)$

(iii) $X=A_n(a)$

สำหรับทุก ๆ $x\in X$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (ii) จาก $a^n\le x$ จะได้ว่า $X\subseteq A_n(a)\subseteq A_n(a,x)\subseteq X$ ดังนั้น $X=A_n(a,x)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ให้ $x=1$ จะได้ $X=A_n(a,1)=A_n(a)$ ดังนั้น $X=A_n(a)$

(iii) $\Rightarrow$ (i) ให้ $x\in X=A_n(a)$ จะได้ $a^n*x=1$ ดังนั้น $a^n\le x$ □

ทฤษฎีบท 27 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $A_n(x,y)\subseteq F$ สำหรับทุก ๆ $x,y\in F$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

ให้ $z\in A_n(x,y)$ จะได้ว่า $x^n*(y*z)=1\in F$ จาก $x\in F$ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า $x^n\in F$

เนื่องจาก x^n, $x^n*(y*z)\in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $y*z\in F$

และจาก y, $y*z\in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $z\in F$

ดังนั้น $A_n(x,y)\subseteq F$ □

ทฤษฎีบท 28 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $F=\bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x,y\in F$ เมื่อ $n\in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X เริ่มต้นจะแสดงว่า $F\subseteq \bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y)$

ให้ $z\in F$ เนื่องจาก $z^n*(z*z)=z^n*1=1$

ดังนั้น $z\in A_n(z,z)\subseteq \bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y)$

นั่นคือ $F\subseteq \bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y)$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y) \subseteq F$

ให้ $w \in \bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y)$ ดังนั้น $w \in A_n(x,y)$ สำหรับบาง $x, y \in F$ จะได้ว่า $x^n * (y * w) = 1 \in F$ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า $x^n \in F$ เนื่องจาก x^n, $x^n * (y * w) \in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $y * w \in F$ และจาก y, $y * w \in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $w \in F$

ดังนั้น $\bigcup_{x,y\in F} A_n(x,y) \subseteq F$

สามารถสรุปได้ว่า $F = \bigcup A_n(x,y)$ □

ทฤษฎีบท 29 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว $A_n(x) \subseteq F$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X ให้ $z \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * z = 1 \in F$ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่าถ้า $x \in F$ แล้ว $x^n \in F$ เนื่องจาก x^n, $x^n * z \in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $z \in F$

ดังนั้น $A_n(x) \subseteq F$ □

ทฤษฎีบท 30 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X

ถ้า F เป็นตัวกรองของ X แล้ว

$F = \bigcup_{x\in F} A_n(x)$

สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองของ X

เริ่มต้นจะแสดงว่า $F \subseteq \bigcup_{x\in F} A_n(x)$

ให้ $z \in F$ โดย (BE1) จะได้ว่า $z * z = 1$ ดังนั้น $z^n * z = 1$ นั่นคือ $z \in A_n(z)$

เนื่องจาก $A_n(z) \subseteq \bigcup_{x\in F} A_n(x)$

นั่นคือ $F \subseteq \bigcup_{x\in F} A_n(x)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\bigcup_{x\in F} A_n(x) \subseteq F$

เนื่องจาก $A_n(x) \subseteq F$ ทุก ๆ $x \in F$

ดังนั้น $\bigcup_{x\in F} A_n(x) \subseteq F$

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $F = \bigcup_{x\in F} A_n(x)$ □

ทฤษฎีบท 31 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว สำหรับทุก ๆ $x \in X$ จะได้ว่า $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X ก็ต่อเมื่อ ถ้า $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ แล้ว $c^n \leq b$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in X$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X,

X , $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$

จะแสดงว่า $c^n \leq b$

เนื่องจาก $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in X$ จะได้ว่า $c^n * (a * b) = 1$ และ $c^n * a = 1$

พิจารณา $c^n * b \;= 1 * (c^n * b)$

$= (c \quad a) \quad (c \quad b)$

$= c^n * (a * b)$

$= 1$

ดังนั้น $c^n \leq b$

($\Leftarrow$) สมมติให้ ถ้า $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ แล้ว $c^n \leq b$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in X$ จะแสดงว่า $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X เนื่องจาก $1 \in A_n(x)$ ดังนั้น (F1) เป็นจริง ให้ $a * b \in A_n(x)$ และ $a \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * (a * b) = 1$ และ $x^n * a = 1$ ดังนั้น $x^n \leq a * b$ และ $x^n \leq a$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า $x^n \leq b$ ดังนั้น $x^n * b = 1$ นั่นคือ $b \in A_n(x)$ จึงได้ว่า (F2) เป็นจริง

ดังนั้น $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X □

ทฤษฎีบท 32 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว จะได้ว่า $y \in A_n(x)$ ก็ต่อเมื่อ $A_n(x) = A_n(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $y \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * y = 1$

ให้ $b \in A_n(x,y)$ จะได้ว่า $x^n * (y * b) = 1$

$$
\begin{aligned}
\text{พิจารณา} \quad x^n * b &= 1 * (x^n * b) \\
&= (x^n * y) * (x^n * b) \\
&= x^n * (y * b) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $b \in A_n(x)$ ดังนั้น $A_n(x,y) \subseteq A_n(x)$

และจากทฤษฎีบท 23 จะได้ว่า $A_n(x) \subseteq A_n(x,y)$

ดังนั้น $A_n(x) = A_n(x,y)$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $A_n(x) = A_n(x,y)$

เนื่องจาก $y \in A_n(x,y)$ ดังนั้น $y \in A_n(x,y) = A_n(x)$

นั่นคือ $y \in A_n(x)$ □

ทฤษฎีบท 33 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว จะได้ว่า $x^n \leq y^n$ ก็ต่อเมื่อ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $x^n \leq y^n$ จะได้ว่า $x^n * y^n = 1$

ให้ $a \in A_n(y)$ จะได้ว่า $y^n * a = 1$

$$
\begin{aligned}
\text{พิจารณา} \quad x^n * a &= 1 * (x^n * a) \\
&= (x^n * y^n) * (x^n * a) \\
&= x^n * (y^n * a) \\
&= x^n * 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a \in A_n(x)$ นั่นคือ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$

เนื่องจาก $y^n * y^n = 1$ จะได้ว่า $y^n \in A_n(y) \subseteq A_n(x)$ ดังนั้น $y^n \in A_n(x)$

ทำให้ได้ว่า $x^n * y^n = 1$ นั่นคือ $x^n \le y^n$ □

บทแทรก 34 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว จะได้ว่า $x^n \le y^n$ และ $y^n \le x^n$

ก็ต่อเมื่อ $A_n(x) = A_n(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $x^n \le y^n$ และ $y^n \le x^n$ โดยทฤษฎีบท 33 จะได้ว่า $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ และ $A_n(x) \subseteq A_n(y)$ ดังนั้นสรุปได้ว่า $A_n(x) = A_n(y)$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $A_n(x) = A_n(y)$

โดยทฤษฎีบท 33 จะได้ $x^n \le y^n$ และ $y^n \le x^n$

นั่นคือ $x^n \le y^n$ □

ทฤษฎีบท 35 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว แล้ว $A_n(x)$ เป็นไอดีลของ X สำหรับทุก ๆ $x \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์. ให้ $y \in X$ และ $a \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * a = 1$

พิจารณา
$$x^n * (y * a) = y * (x^n * a) = y * 1 = 1$$

จะได้ว่า $y * a \in A_n(x)$ ดังนั้น (I1) เป็นจริง

ให้ $y \in X$ และ $a, b \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * a = 1$ และ $x^n * b = 1$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
& x^n * ((a*(b*y))*y) \\
&= (x^n * (a*(b*y)))*(x^n * y) \\
&= ((x^n * a)*(x^n *(b*y)))*(x^n * y) \\
&= (1*(x^n *(b*y)))*(x^n * y) \\
&= (x^n *(b*y))*(x^n * y) \\
&= ((x^n * b)*(x^n * y))*(x^n * y) \\
&= (1*(x^n * y))*(x^n * y) \\
&= (x^n * y)*(x^n * y) \\
&= 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(a*(b*y))*y \in A_n(x)$ ดังนั้น (I2) เป็นจริง สามารถสรุปได้ว่า $A_n(x)$ เป็นไอดีลของ X □

ทฤษฎีบท 36 ให้ X เป็น พีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X สำหรับทุก ๆ $x \in F$ จะได้ว่า F สอดคล้องกับเงื่อนไข (I3) และ (I4) ก็ต่อเมื่อ F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ (I3) และ (I4) เป็นจริง จะแสดงว่า F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X เนื่องจาก (I3) จะได้ว่า $1 \in F$ ให้ $x * y \in F$ และ $x*(y*z) \in F$ โดย (BE3) จะได้ว่า $1*(x*y) = x*y \in F$ จาก $1*(x*y) \in F$ และ $x \in F$ โดย (I4) และ (BE3) จะได้ว่า $y = 1*y \in F$ จาก $x*(y*z) \in F$ และ $y \in F$ โดย (I4) จะได้ว่า $x * z \in F$

ดังนั้น F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X

($\Leftarrow$) สมมติ F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X จะแสดงว่า (I3) และ (I4) เป็นจริง ให้ $y \in F$ และ $x*(y*z) \in F$ จาก F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X โดยบทนิยาม 9 จะได้ว่า $1 \in F$ ดังนั้น (I3) เป็นจริง จาก F เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X โดยประพจน์ 10 จะได้ว่า F เป็นตัวกรองของ X โดย (BE4) จะได้ว่า $y*(x*z) = x*(y*z) \in F$ โดย (F2) จะได้ว่า $x * z \in F$ ดังนั้น (I4) เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 37 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว แล้ว $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัว เนื่องจาก $x^n(y * 1) = 1$ ดังนั้น $1 \in A_n(x, y)$

ให้ $a*(b*c) \in A_n(x, y)$ และ $a * b \in A_n(x, y)$

จะได้ว่า $x^n * (y*(a*(b*c))) = 1$ และ

$x^n * (y*(a*b)) = 1$

พิจารณา $x^n * (y*(a*c))$
$$\begin{aligned}
&= 1*(x^n *(y*(a*c))) \\
&= (x^n *(y*(a*b)))*(x^n *(y*(a*c))) \\
&= x^n *((y*(a*b))*(y*(a*c))) \\
&= x^n *(y*((a*b)*(a*c))) \\
&= x^n *(y*(a*(b*c))) \\
&= 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $a * c \in A_n(x, y)$

ดังนั้น $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X □

บทแทรก 38 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัวแล้ว $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองของ X สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 37 และประพจน์ 10 จะได้ว่า $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองของ X □

ทฤษฎีบท 39 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัวแล้ว $A_n(x)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X สำหรับทุก ๆ $x \in X$ เมื่อ $n \in X$

พิสูจน์ โดยบทแทรก 25 จะได้ $A_n(x) = A_n(x, 1)$ และทฤษฎีบท 37 ได้ว่า $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X ดังนั้น $A_n(x)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขของ X □

บทแทรก 40 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE แจกแจงในตัวแล้ว $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X สำหรับทุก ๆ $x \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 39 และประพจน์ 10 จะได้ว่า $A_n(x)$ เป็นตัวกรองของ X □

ทฤษฎีบท 41 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE สลับที่แจกแจงในตัว แล้ว $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขบวกของ X สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ X เป็น พีชคณิต-BE สลับที่แจกแจงในตัว และให้ $x, y \in X$

โดยบทแทรก 15 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิตมีเงื่อนไข นั่นคือ $(x * y) * x = x$

ให้ $a * ((b * c) * b) \in A_n(x, y)$ และ $a \in A_n(x, y)$

จะได้ $x^n * (y * (a * ((b * c) * b))) = 1$

และ $x^n * (y * a) = 1$

พิจารณา $x^n * (y * b) \quad = 1 * (x^n * (y * b))$

$= \left[x^n * \left(y * (a * ((b * c) * b))\right)\right] * (x^n * (y * b))$

$= \left[x^n * \left((y * a) * (y * ((b * c) * b))\right)\right] * (x^n * (y * b))$

$= \left[\left(x^n * (y * a)\right) * \left(x^n * (y * ((b * c) * b))\right)\right] * (x^n * (y * b))$

$= \left[1 * \left(x^n * (y * b)\right)\right] * (x^n * (y * b))$

$= \left(x^n * (y * b)\right) * \left(x^n * (y * b)\right)$

$= 1$

ดังนั้น $b \in A_n(x, y)$

นั่นคือ $A_n(x, y)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขบวกของ X □

ทฤษฎีบท 42 ถ้า X เป็น พีชคณิต-BE สลับที่แจกแจงในตัว แล้ว $A_n(x)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขบวกของ X สำหรับทุก ๆ $x \in X$ เมื่อ $n \in N$

พิสูจน์ เนื่องจาก $A_n(x) = A_n(x, 1)$ และทฤษฎีบท 41จะได้ $A_n(x)$ เป็นตัวกรองมีเงื่อนไขบวกของ X □

บรรณานุกรม

1. Kim HS, Kim YH. On BE-algebras. Sci Math Jpn online 2006;19:1299-302.
2. Ahn SS, So KS. On ideal and upper sets in BE-algebras. Sci Math Jpn online 2008;21:351-7.
3. Walendziak A. On commutative BE-algebras. Sci Math Jpn online 2008;21:585-8.
4. Ahn SS, So KS. On generalized upper sets in BE-algebras. Bull Korean Math Soc 2009;46(2):281-7.
5. Meng BL. On filter in BE-algebras. Sci Math Jpn online 2010;23:105-11.
6. Ahn SS, Kim YH, Ko JM. Filters in commutative BE-algebras. Commun Korean Math Soc 2012;27(2):233-4
7. Saeid AB, Rezaei A, Borzooei RA. Some type of filters in BE-algebras. Math Comput Sci 2013;7: 341-52.
8. Rezaei A, Saeid AB, Borzooei RA. Relation between Hilbert algebras and BE-algebras. Appl Appl Math 2013;8(2):573-84.