

พื้นฐานของแม่เหล็กขั้วเดียวเชิงทฤษฎี

Basic Theoretical Magnetic Monopole

พีเชฐ วนิชชาพงศ์เจริญ¹

Pichet Vanichchajongjaroen¹

Received: 30 October 2015; Accepted: 4 December 2015

บทคัดย่อ

บทความนี้เน้นอธิบายและขยายความแนวคิดเบื้องต้นของทฤษฎีสนามแม่เหล็กขั้วเดียว โดยยึดคำอธิบายของ Dirac นอกจากนี้บทความนี้ยังอธิบายเส้นทางการพัฒนาของทฤษฎีสนามแม่เหล็กขั้วเดียว ซึ่งตลอดเส้นทางจะพบว่าแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นเกี่ยวข้องกับหลายหัวข้อในฟิสิกส์ทฤษฎี เช่น ไฟฟ้าแม่เหล็ก ทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัม ฟิสิกส์อนุภาค ทฤษฎีสมมาตรยิ่งยวด และทฤษฎีสตริง

คำสำคัญ: แม่เหล็กขั้วเดียว ฟิสิกส์ทฤษฎี

Abstract

This article discusses the basic idea of a magnetic monopole based on Dirac's explanation. It also describes lines of developments of the theory of a magnetic monopole. Along the way, the simple idea of a magnetic monopole is demonstrated to be related to various topics in theoretical physics, for example, electricity-magnetism, quantum mechanics, particle physics, supersymmetry and string theory.

Keywords: Magnetic Monopole, Theoretical Physics

บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าแม่เหล็กประกอบไปด้วยสองขั้วเรียกว่าขั้วเหนือกับขั้วใต้ คำถามหนึ่งที่พบได้บ่อยคือ สามารถแยกขั้วเหนือกับขั้วใต้ของแม่เหล็กออกจากกันได้อย่างสมบูรณ์แบบหรือไม่ การนำแม่เหล็กมาตัดตรงกลางระหว่างขั้วเหนือกับขั้วใต้ นั้นไม่ได้เป็นการแยกขั้วทั้งสองออกจากกัน แต่แม่เหล็กที่ถูกตัดออกมาทั้งสองแท่งก็มีทั้งขั้วเหนือและขั้วใต้เป็นของตัวเอง

ในทางทฤษฎีมีการทำนายถึงการมีอยู่ของแม่เหล็กขั้วเดียวมาตั้งแต่ปี 1931 แล้ว โดย Paul Dirac ซึ่งแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นมีลักษณะเป็นอนุภาคชนิดหนึ่ง การอธิบายถึงแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นนอกจากจะใช้ทฤษฎีทางไฟฟ้าแม่เหล็กแล้ว ยังต้องอาศัยกลศาสตร์ควอนตัมเข้าช่วยอีกด้วย

ถึงแม้ว่าจนถึงบัดนี้ยังไม่มีการค้นพบแม่เหล็กขั้วเดียว แต่ก็มีการคาดหวังว่าแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นมีอยู่จริง เช่น จากการมีอยู่ของแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นเป็นเพียงคำอธิบายเดียวว่าทำไมวัตถุที่มีประจุ จะต้องมีการประจุไม่ต่อเนื่อง กล่าวคือต้องเป็นจำนวนเท่าของค่าประจุอิเล็กตรอน (หมายเหตุ: ในทางทฤษฎียังมีอนุภาคมูลฐาน คือ ควาร์ก (quark) ซึ่งมีประจุเป็นเศษส่วนของประจุอิเล็กตรอน แต่จะไม่กล่าวถึงควาร์กในส่วนเนื้อหาหลักของบทความนี้ เนื่องจากการอธิบายควาร์กจะต้องอาศัยทฤษฎีควอนตัมโครโมไดนามิกส์ (quantum chromodynamics) ซึ่งอยู่นอกเหนือขอบเขตของบทความนี้) นอกจากนี้ทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดียวนั้นยังมีความสำคัญอย่างมากกับฟิสิกส์ทฤษฎี โดยเฉพาะฟิสิกส์อนุภาค เช่น ทำให้เข้าใจความสมมาตรในฟิสิกส์อนุภาคได้ดีขึ้น

¹ อาจารย์, วิทยาลัยเพื่อการค้นคว้าระดับรากฐาน “สถาบันสำนักเรียนท่าโพธิ์ชัย” มหาวิทยาลัยนเรศวร อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก
email: pichetv@nu.ac.th

¹ Lecturer, The Institute for Fundamental Study, “The Tah Poe Academia Institute”, Naresuan University, Muang, Phitsanulok 65000, Thailand email: pichetv@nu.ac.th

ในบทความนี้จะเน้นอธิบายและตีความแนวคิดบางส่วนของ Dirac เกี่ยวกับทฤษฎีพื้นฐานของแม่เหล็กขั้วเดียว ถึงแม้ว่าจะมีบทความวิชาการมากมายเกี่ยวกับแม่เหล็กขั้วเดียวในภาษาอังกฤษ แต่จากที่ผู้เขียนทราบ ยังไม่พบบทความใดในภาษาไทยที่อธิบายทฤษฎีพื้นฐานของแม่เหล็กขั้วเดียว ผู้เขียนหวังว่าบทความนี้จะ เป็นพื้นฐานสำหรับนักวิจัยไทยที่ต้องการศึกษาทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดียวต่อไปในอนาคต

สนามไฟฟ้าและกฎของเกาส์

ประจุไฟฟ้าเป็นคุณสมบัติหนึ่งของวัตถุซึ่งแสดงอำนาจทางไฟฟ้า วัตถุสองชนิดที่มีประจุไฟฟ้า จะมีแรงทางไฟฟ้ากระทำต่อกัน ค่าของประจุไฟฟ้านั้นอธิบายด้วยปริมาณซึ่งจะมีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของแรง หากวัตถุสองชนิดผลัดออกจากกันด้วยแรงทางไฟฟ้า จะกล่าวว่า ประจุไฟฟ้าของวัตถุทั้งสองมีเครื่องหมายเดียวกัน แต่หากวัตถุสองชนิดดึงดูดเข้าหากันด้วยแรงทางไฟฟ้า จะกล่าวว่า ประจุไฟฟ้าของวัตถุทั้งสองมีเครื่องหมายต่างกัน จากนิยามอิเล็กตรอนมีประจุเป็นลบ ดังนั้นวัตถุที่ดึงดูดกับอิเล็กตรอนด้วยแรงทางไฟฟ้าจะมีประจุเป็นลบ แต่วัตถุที่ดึงดูดกับอิเล็กตรอนด้วยแรงทางไฟฟ้าจะมีประจุเป็นบวก

อาจมองได้ว่าประจุไฟฟ้าหรือกลุ่มของประจุไฟฟ้านั้น สร้างสนามของแรงไฟฟ้าขึ้นมา กล่าวคือเมื่อวางประจุไฟฟ้าทดสอบอันหนึ่งลงบนสนามนี้จะทราบได้ทันทีว่าแรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าทดสอบนี้เป็นอย่างไร ทั้งนี้ค่าของประจุไฟฟ้าทดสอบนั้นจะต้องมีค่าน้อยมากๆ เพื่อที่จะไม่ไปรบกวนสนามไฟฟ้าของกลุ่มประจุไฟฟ้าที่กำลังพิจารณา

เนื่องจากนิยามของสนามไฟฟ้านั้นเกี่ยวข้องกับแรง ซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ สนามไฟฟ้าจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ด้วย (หมายเหตุ: ที่จริงแล้ว หากกล่าวโดยเคร่งครัด สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ไม่ใช่ปริมาณเวกเตอร์ หากแต่เป็นองค์ประกอบของปริมาณเทนเซอร์ แต่การกล่าวว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นปริมาณเวกเตอร์นั้น ก็เพียงพอแล้วสำหรับบทความนี้) (Figure 1) แสดงตัวอย่างของสนามไฟฟ้า

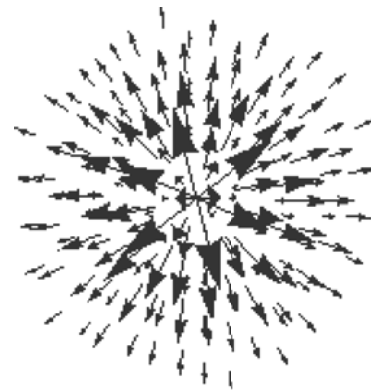
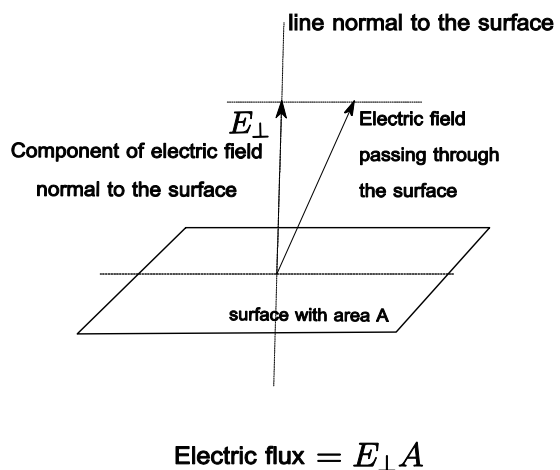


Figure 1 Example of electric field

พิจารณามิวสมมติเล็กๆ มิวหนึ่ง ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านมิวนั้นคือการวัดปริมาณสนามไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับมิว การคำนวณทำได้โดยการนำองค์ประกอบของสนามไฟฟ้า ณ จุดบนมิวนั้น คูณด้วยพื้นที่ของมิวนั้น สำหรับการหาฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านมิวใด ๆ นั้น ทำได้โดยการแยกส่วนพิจารณามิวเล็กๆ แล้วคำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านมิวเล็กๆ นั้นเสร็จแล้วจึงนำฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดที่เกิดจากมิวเล็กๆ มารวมกัน



$$\text{Electric flux} = E_{\perp} A$$

Figure 2 Electric flux through a small surface

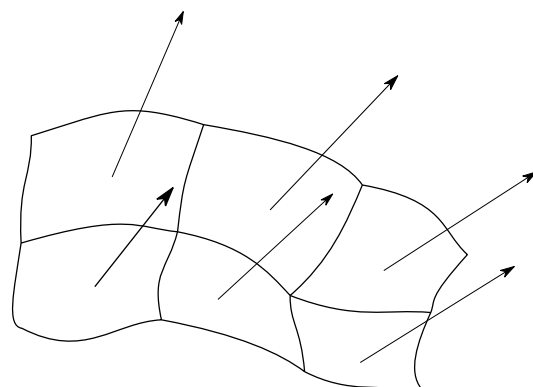


Figure 3 Electric flux through any surface can be obtained by combining fluxes from small surfaces

การคำนวณฟลักซ์ไฟฟ้า นั้นจะต้องคำนึงถึงเครื่องหมายด้วย ในที่นี้จะเน้นพิจารณาฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิด โดยที่หากองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าส่วนที่ตั้งฉากกับส่วนย่อยของผิวปิดมีทิศพุ่งออกจากผิวส่วนนั้น ฟลักซ์ไฟฟ้าจากส่วนนั้นจะมีค่าเป็นบวก แต่หากองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าส่วนที่ตั้งฉากกับผิว มีทิศพุ่งเข้าผิว ฟลักซ์ไฟฟ้าจากส่วนนั้นจะมีค่าเป็นลบ

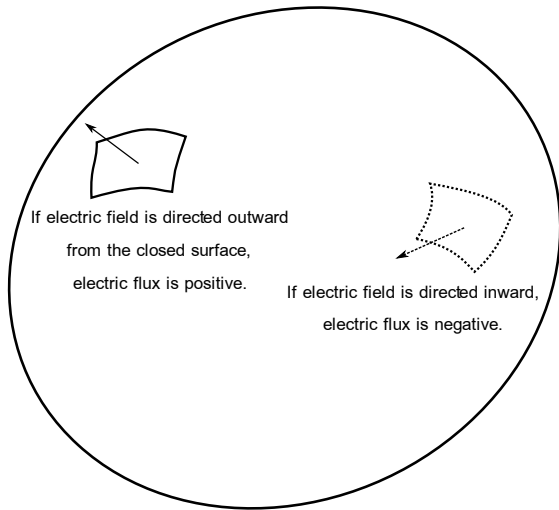


Figure 4 When computing electric flux through a closed surface, one needs to be careful with sign.

กฎหนึ่งที่สำคัญในการอธิบายพฤติกรรมของสนามไฟฟ้าคือกฎของเกาส์สำหรับสนามไฟฟ้า ซึ่งระบุว่า “ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดใดๆ จะมีค่าขึ้นอยู่กับประจุไฟฟ้าลัพท์ที่อยู่ภายในผิวปิดนั้น” ซึ่งเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\oiint_{\text{closed surface}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enclosed}}}{\epsilon_0}$$

โดยที่ \vec{E} คือสนามไฟฟ้า $d\vec{S}$ คือเวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิวส่วนเล็กๆ $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ คือฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าที่ผ่านผิวนั้น สัญลักษณ์ $\oiint_{\text{closed surface}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ แทนการรวมของฟลักซ์ไฟฟ้าทั่วผิวปิด Q_{enclosed} คือค่าประจุไฟฟ้าลัพท์ที่อยู่ภายในผิวปิด ϵ_0 คือค่าคงที่ที่เรียกว่าค่าสภาพยอมของสุญญากาศ

กฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็ก

เนื่องจากแม่เหล็กสามารถออกแรงดึงดูดและแรงผลักได้ จึงอาจจะลองนิยามสนามแม่เหล็กโดยอาศัยแนวคิดมาจาก

การนิยามสนามไฟฟ้า กล่าวคือพิจารณาแรงแม่เหล็กที่ทำต่อประจุแม่เหล็กทดสอบ แต่ทว่าในทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าแบบฉบับ (classical electrodynamics) นั้นไม่มีประจุแม่เหล็กจึงไม่สามารถนิยามโดยวิธีนี้ได้ แต่อย่างไรก็ตามการนิยามสนามแม่เหล็กนั้นยังสามารถกระทำได้ ซึ่งโดยทั่วไปมักพิจารณาแรงที่แม่เหล็กกระทำต่อจุดประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่

นอกจากกฎของเกาส์ของสนามไฟฟ้าแล้ว ยังมีกฎของเกาส์ของสนามแม่เหล็กด้วย ซึ่งระบุในการทำงานเหมือนกัน กล่าวคือฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผิวปิดใดๆ มีค่าเท่ากับประจุแม่เหล็กลัพท์ที่อยู่ภายในผิวปิดนั้น แต่เนื่องจากไม่มีแม่เหล็กขั้วเดี่ยว จึงทำให้ประจุแม่เหล็กภายในผิวปิดใดๆ เป็นศูนย์เสมอ กฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็กจึงเขียนได้เป็น

$$\oiint_{\text{closed surface}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ศักย์สเกลาร์ และศักย์เวกเตอร์

ในการศึกษาพฤติกรรมของไฟฟ้าและแม่เหล็กนั้น แทนที่จะศึกษาโดยตรงจากสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก การคำนวณโดยใช้ปริมาณอันได้แก่ศักย์สเกลาร์ (scalar potential) และศักย์เวกเตอร์ (vector potential) นั้นสะดวกกว่ามาก ในกรณีไฟฟ้าและแม่เหล็กสถิต ศักย์สเกลาร์ V และศักย์เวกเตอร์ \vec{A} นิยามผ่านสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

เพื่อที่จะอธิบายการใช้งานของศักย์สเกลาร์อย่างคร่าวๆ ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ พิจารณาจุดประจุซึ่งมีประจุไฟฟ้า q ค่าศักย์สเกลาร์ ณ จุดที่ห่างจากจุดประจุไประยะ r คือ

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

สนามไฟฟ้าคือ

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

โดยที่ \hat{r} คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย มีทิศทางชี้ออกจากจุดประจุไปยังจุดที่พิจารณา ขั้นตอนสำคัญในตัวอย่างนี้คือหลังจากที่ทราบว่าจะระบบนี้ประกอบไปด้วยจุดประจุ ซึ่งมีประจุไฟฟ้า q แล้ว จะสามารถคำนวณศักย์สเกลาร์ V ได้ แล้วจึงคำนวณสนามไฟฟ้า \vec{E} ซึ่งเป็นสิ่งที่สนใจ

ตามที่ได้อธิบายไปแล้วว่าในทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าแบบฉบับนั้นไม่อนุญาตให้มีแม่เหล็กขั้วเดียว เพื่อให้เข้าใจในเหตุผล ลองพิจารณาดูว่าจะเกิดอะไรขึ้นหากพยายามเพิ่มประจุแม่เหล็กเข้าไปในทฤษฎี ในขั้นต้นลองสมมติว่ามีประจุแม่เหล็ก g ซึ่งให้ศักย์เวกเตอร์เป็น \vec{A} ดังนั้นจะได้ว่าสนามแม่เหล็กคือ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ หากลองคำนวณฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กนี้จะได้

$$\oint_{\text{closed surface}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{closed surface}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

แต่กฎทางคณิตศาสตร์ระบุว่าทางขวามือของสมการข้างต้นนั้นมีค่าเป็นศูนย์เสมอ ดังนั้น

$$\oint_{\text{closed surface}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ซึ่งระบุว่าไม่มีประจุแม่เหล็ก จึงขัดแย้งกับสมมุติฐานในตอนต้น

คำอธิบายของ Dirac

ในปี 1931 Dirac¹ เสนอว่าการจะมีแม่เหล็กขั้วเดียวได้นั้นศักย์เวกเตอร์จะต้องมีค่าไม่ต่อเนื่อง กล่าวคือ เอกลักษณะทางคณิตศาสตร์นี้

$$\oint_{\text{closed surface}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

เป็นจริงเฉพาะกรณีที่ศักย์เวกเตอร์มีค่าต่อเนื่อง ดังนั้นหากศักย์เวกเตอร์มีค่าไม่ต่อเนื่องจะได้ว่า

$$\oint_{\text{closed surface}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \neq 0$$

ผลที่ตามมาคือฟลักซ์แม่เหล็กผ่านผิวปิดมีค่าไม่เป็นศูนย์ และจากกฎของเกาส์จะสรุปได้ว่ามีประจุแม่เหล็กลึบอยู่ภายในผิวปิดนั้น ซึ่งแปลว่ามีสนามแม่เหล็กขั้วเดียว

หากกล่าวในรายละเอียด Dirac เสนอว่าศักย์เวกเตอร์จะมีขนาดเป็นค่าเอกฐาน ณ ตำแหน่งของจุดประจุแม่เหล็ก และตามเส้นยาวอนันต์ที่ต่อออกมาจากประจุแม่เหล็กนั้นเส้นที่ยาวอนันต์นี้ถูกเรียกในภายหลังว่าเส้นเชือกของ Dirac (Dirac's string) แต่ทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าแบบฉบับนั้นไม่อนุญาตให้ศักย์เวกเตอร์มีค่าไม่ต่อเนื่องตามที่ Dirac เสนอมา

อย่างไรก็ดีข้อเสนองานของ Dirac สามารถเป็นไปได้หากพิจารณา กลศาสตร์ควอนตัมร่วมด้วย

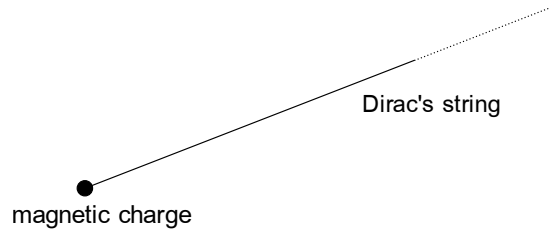


Figure 5 A Dirac's string extended from a magnetic monopole

การศึกษาอิเล็กตรอนในกลศาสตร์ควอนตัมนั้น จะอาศัยปริมาณที่เรียกว่าฟังก์ชันคลื่น ψ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง โดยที่ ณ ตำแหน่งใดๆ ฟังก์ชันคลื่นนั้นจะถูกอธิบายด้วยปริมาณสองปริมาณคือ แอมพลิจูด และมุมเฟส

การอธิบายต่อจากนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมเฟสและสนามแม่เหล็กขั้วเดียว แต่เพื่อให้เห็นแนวคิดคร่าวๆ พิจารณาตัวอย่าง คือสมการของ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ซึ่งอธิบายอิเล็กตรอนอิสระในทางกลศาสตร์ควอนตัม

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$$

โดยที่ \hbar คือค่าคงที่ของพลังค์ (planck's constant) m คือมวลของอิเล็กตรอน ψ คือฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน และ E คือพลังงานซึ่งเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันคลื่น ψ หากเขียนฟังก์ชันคลื่นเป็น $\psi = \psi_0 e^{i\alpha/\hbar}$ โดยที่ α เป็นฟังก์ชันขึ้นกับตำแหน่ง จะได้ว่า ψ_0 ประพฤติตัวตามสมการ

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \alpha)^2 \psi_0 = E\psi_0$$

ซึ่งเป็นสมการ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ในรูปแบบเดียวกับสมการที่อธิบายอิเล็กตรอนภายใต้ศักย์เวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{\nabla} \alpha / e$ ซึ่งหากจะอธิบายสนามแม่เหล็กขั้วเดียว จะต้องได้ว่า α มีค่าที่ไม่ต่อเนื่อง มิฉะนั้นสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ จะมีค่าเป็นศูนย์

จากแนวคิดข้างต้นจะเห็นได้ว่า ตัวคูณ $e^{i\alpha/\hbar}$ ซึ่งเป็นส่วนของมุมเฟสของฟังก์ชันคลื่น มีความสำคัญคือแปลงระบบที่อธิบายอิเล็กตรอนอิสระ มาเป็นระบบที่อธิบายอิเล็กตรอนภายใต้สนามแม่เหล็กขั้วเดียว ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า α ต้องมีค่าที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งจะกล่าวถึงประเด็นนี้ในลำดับต่อไป แต่ก่อนอื่น จะขยายความเกี่ยวกับมุมเฟสของฟังก์ชันคลื่น

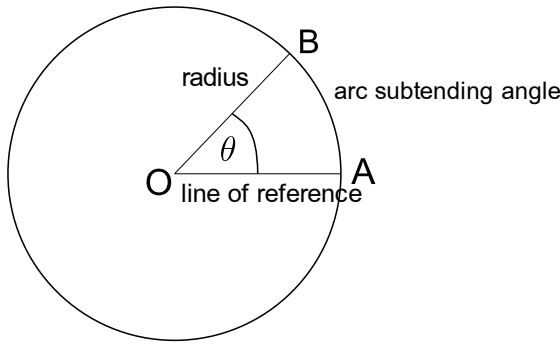


Figure 6 Angle measurement in radian

สามารถกล่าวได้ว่ามุมเฟสเป็นมุมชนิดหนึ่ง การวัดมุมในทางฟิสิกส์จะนิยมวัดในหน่วยเรเดียน ซึ่งหาได้จากการนำความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น มาหารด้วยรัศมีของวงกลมจาก (Figure 6) ความยาวส่วนโค้งนั้นวัดเทียบกับเส้นอ้างอิง \overline{OA} กล่าวคือ มุม θ คำนวณได้จากสูตร

$$\theta = \frac{\text{Arc length } AB}{\text{length of } \overline{OA}}$$

หากวัดส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาเทียบกับเส้นอ้างอิง จะกำหนดให้ความยาวมีค่าเป็นบวกแต่หากวัดตามเข็มนาฬิกา จะกำหนดให้ความยาวมีค่าเป็นลบ จากนิยามนี้จะเห็นได้ว่ามุมสามารถมีค่าเป็นลบได้

การวัดมุมรอบวงกลมหนึ่งรอบ จะได้มุม 2π ซึ่งหาได้จากการคำนวณง่าย ๆ คือ

$$\frac{\text{circumference}}{\text{radius}} = 2\pi$$

ซึ่งมาจากนิยามของค่า π ลองย้อนกลับมาดู Figure 6 การวัดความยาวส่วนโค้ง AB นั้น แทนที่จะวัดแบบตรงไปตรงมาตามนิยามอาจทำได้โดยการวัดจากจุด A แล้วกวาดไปหนึ่งรอบแล้วค่อยมาจบที่จุด B ซึ่งการวัดในลักษณะนี้จะได้มุมคือ

$$\frac{\text{circumference}}{\text{radius}} + \frac{\text{Arc length } AB}{\text{radius}} = 2\pi + \theta$$

ในทำนองเดียวกัน อาจวัดความยาวส่วนโค้งโดยการกวาดจากจุด A เป็นจำนวน n รอบแล้วค่อยวัดความยาวส่วนโค้ง AB ในแบบปกติ ดังนั้นมุมที่วัดได้ จะอยู่ในรูป

$$2\pi n + \theta$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ซึ่งมีค่าเป็นบวกหากกวาดรอบวงกลมในทิศทวนเข็มนาฬิกา แต่เป็นลบหากกวาดรอบวงกลมในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังนั้นการวัดมุมจึงมีความกำกวม เนื่องจาก n มีค่าเป็นจำนวนเต็มใดๆ ก็ได้

ระบบหนึ่งในกลศาสตร์ควอนตัมนั้นอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น หากพิจารณาเฉพาะมุมเฟสของฟังก์ชันคลื่น อาจมองภาพได้ว่าค่าของมุมเฟส ณ แต่ละจุดบนปริภูมิ นั้นได้ถูกกำหนดไว้แล้ว อันที่จริงแล้วระบบนี้ยังสามารถถูกอธิบายได้ในรูปแบบอื่น เช่น หากมีการหมุนมุมเฟส ณ ทุกๆ จุดบนปริภูมิด้วยค่าที่เท่าๆ กันแล้ว ฟังก์ชันคลื่นใหม่ที่ได้นี้ก็ยังคงอธิบายระบบเดิมอยู่ ดังนั้นแม้จะพิจารณาระบบเดิม การอธิบายค่าของมุมเฟส ณ ตำแหน่งเดียว จะมีความกำกวม แต่หากพิจารณาสองตำแหน่งที่อยู่ใกล้กัน จะพบว่าความต่างของมุมเฟสนั้นมีค่าที่แน่นอน ไม่ว่าจะอธิบายระบบนี้ในรูปแบบใดก็ตาม

ที่จริงแล้วค่าความต่างของมุมเฟสระหว่างจุดสองจุดใดๆ จะมีค่าขึ้นอยู่กับเส้นทางด้วย ซึ่งผลก็คือการวนตามเส้นทางที่เป็นวงปิดไม่ได้รับประกันว่ามุมเฟสจะไม่เปลี่ยนแปลง กล่าวคือ หากพิจารณาที่จุด A ซึ่งฟังก์ชันคลื่นมีค่ามุมเฟสค่าหนึ่ง การวนไปตามวงปิดแล้วกลับมาที่จุด A จะพบว่ามีความเป็นไปได้ที่ค่ามุมเฟสจะเปลี่ยนไป การเปลี่ยนของค่ามุมเฟสนั้นเกิดได้จากสองปัจจัยคือ การที่ฟังก์ชันคลื่นมีค่าเป็นศูนย์ ณ จุดใดจุดหนึ่งบนปริภูมิ และภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็ก

จะเริ่มจากการพิจารณากรณีที่ ฟังก์ชันคลื่นมีค่าเป็นศูนย์ ณ จุดใดจุดหนึ่งบนปริภูมิ แต่ไม่มีสนามไฟฟ้าแม่เหล็กในระบบ

จากที่กล่าวไปแล้วข้างต้น ค่าความต่างของมุมเฟสระหว่างจุดสองจุดใดๆ จะมีค่าขึ้นอยู่กับเส้นทางด้วยตัวอย่างเช่นจาก (Figure 7) ถึงแม้ว่าจุด A กับจุด B จะอยู่ใกล้กัน แต่หากติดตามค่าความต่างของมุมเฟสไปตามเส้นโค้งที่กำหนดให้ในรูปจะพบว่าเฟสของจุด A กับจุด B นั้นต่างกันเกือบ 2π หากต่อเส้นโค้งนั้นจนเป็นวงปิด จะพบว่าจากการเริ่มที่จุด A แล้วไปตามเส้นทางจนกลับมาที่จุด A อีกครั้งหนึ่งนั้น ทำให้มุมเฟสมีค่าเปลี่ยนไป 2π

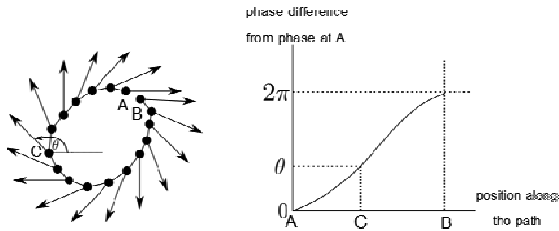


Figure 7 Left: phase along the given path. Right: a rough plot showing the phase difference from that of point A. The determination of the phase difference is demonstrated on a point C.

โดยทั่วไปแล้ว การวนตามเส้นทางที่เป็นวงปิดสามารถทำให้มุมเฟสเปลี่ยนไป $2\pi n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ตัวอย่างที่แสดงใน (Figure 8) เป็นกรณีที่ $n = 2$

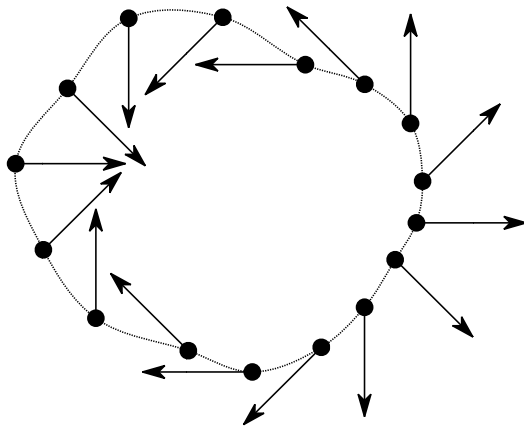


Figure 8 Going around the closed path given in this figure in the counterclockwise direction will change the phase by 4π

สำหรับวงปิดใน (Figure 7) และ (Figure 8) นั้น จะมีจุดภายในวงปิดที่มีค่าฟังก์ชันคลื่นเป็นศูนย์ ซึ่งสามารถทำให้ประจักษ์ได้โดยสมมติให้วงปิดนั้นค่อยๆ เล็กลงเรื่อยๆ จนเป็นจุด ซึ่ง ณ จุดนี้ จะไม่สามารถบอกค่าของมุมเฟสของฟังก์ชันคลื่นได้ ซึ่งกรณีเดียวที่สอดคล้องคือ ฟังก์ชันคลื่น ณ จุดนี้ ต้องมีค่าเป็นศูนย์ ที่จริงแล้ว บริเวณที่ฟังก์ชันคลื่นมีค่าเป็นศูนย์นั้น ไม่ได้มีลักษณะเป็นจุด แต่มีลักษณะเป็นเส้น เรียกว่าเส้นบัพ (nodal line)

จากที่กล่าวมาก่อนหน้านี้ อีกปัจจัยหนึ่งที่ทำให้มุมเฟสของฟังก์ชันคลื่นเปลี่ยนไปหลังจากวนรอบวงปิดคือ การที่ระบบมีอันตรกิริยากับสนามไฟฟ้าแม่เหล็ก

พิจารณาอิเล็กตรอนประจุ e ภายใต้สนามแม่เหล็ก \vec{B} และสมมติว่าฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน ณ จุด

ใดๆ บนปริภูมิ มีค่าไม่เป็นศูนย์ Dirac อธิบายว่าในกรณีนี้ มุมเฟสที่เปลี่ยนไปหลังจากวนรอบวงปิด มีค่าแปรผันตรงกับฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงปิดนั้น

หากรวมทั้งสองปัจจัยเข้าด้วยกันจะได้อธิบายการเปลี่ยนมุมเฟสของฟังก์ชันคลื่น หลังจากวนรอบวงปิดนั้น มีค่า

phase change

$$= 2\pi n + \frac{2\pi e}{h} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

โดยที่ h คือค่าคงที่ของพลังค์ ในพจน์แรก ค่า n เป็นจำนวนเต็มที่ขึ้นอยู่กับชนิดและจำนวนของเส้นบัพที่ผ่านผิวซึ่งถูกล้อมรอบโดยวงปิด และในพจน์ที่สอง การอินทิเกรตนั้นก็ทำทั่วผิวนั้นเช่นกัน

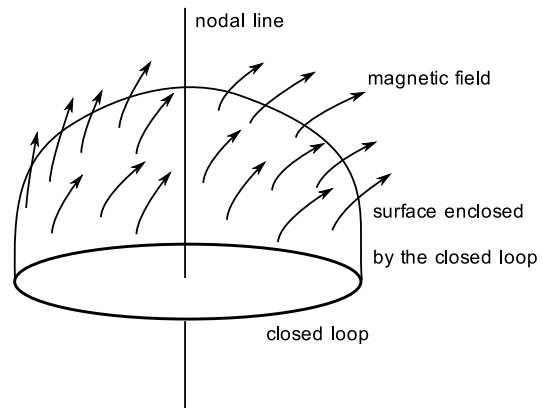


Figure 9 Total phase change around the closed loop is determined by the nodal line passing through the surface enclosed by the loop and by magnetic flux passing through that surface

ค่าของมุมเฟสที่เปลี่ยนไปจากการวนรอบวงปิดนั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับผิวที่พิจารณา トラバドที่ผิวนั้นถูกล้อมรอบด้วยวงปิดนั้น หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ขอบของผิวนั้นคือวงปิด

เนื่องจากผิวปิดไม่มีขอบ ดังนั้นจึงไม่มีวงปิดที่เกี่ยวข้องกัน ซึ่งทำให้ได้ว่าเฟสที่เปลี่ยนไปมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$0 = 2\pi n + \frac{2\pi e}{h} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

ดังนั้น

$$\frac{e}{h} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะมีค่าไม่เป็นศูนย์หากเส้นลวดมีจุดปลาย อยู่ภายในผิวปิด Dirac แสดงตัวอย่างสำหรับกรณีแม่เหล็ก ขั้วเดี่ยวอยู่ที่จุดปลายของเส้นลวด และเส้นเชือกของ Dirac ทับ กับเส้นลวดพอดี (ดู **Figure 5** ประกอบ) ในกรณีนี้จะได้ว่าฟลักซ์ ของแม่เหล็กที่ผ่านผิวปิดมีค่าเท่ากับประจุแม่เหล็ก g และ

$$\frac{eg}{h} = 1$$

หากเปลี่ยนไปพิจารณาอนุภาคชนิดอื่น ซึ่งสมมุติว่า มีประจุ q มุมเฟสที่เปลี่ยนไปจากการวนรอบวงปิดคือ

$$\begin{aligned} \text{phase change} \\ = 2\pi n + \frac{2\pi q}{h} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

แต่ n ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็น -1 อีกต่อไปแต่เป็นได้ตั้งแต่ $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ด้วยเหตุนี้ผลที่ได้คือ

$$\frac{qg}{h} = n$$

ซึ่งจะได้

$$q = \frac{nh}{g} = ne$$

ซึ่งบ่งบอกว่าอนุภาคต่าง ๆ จะต้องมียุคเป็นจำนวนเท่า ของประจุอิเล็กตรอน

ทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดี่ยวขั้นพัฒนา

หลังจากที่ Dirac ได้เสนอทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดี่ยวแล้ว นั้น ได้มีการพัฒนาต่อเนื่องกันมาโดยตลอด

บรรดางานที่สำคัญยกตัวอย่างเช่นงานของ 't Hooft² และ Polyakov³ ในปี 1974 และงานของ Wu และ Yang⁴ ในปี 1975 พบว่าแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นยังสามารถพบในทฤษฎีสนาม เกจแบบไม่อาบีเลียน (non-Abelian gauge theory หรือ Yang-Mills theory)⁵ ได้เช่นกันโดย 't Hooft และ Polyakov ศึกษา คำตอบของแบบจำลอง Georgi-Glashow⁶ เฉพาะในส่วนที่อธิบาย สนามเกจ และสนาม Higgs แบบไม่อาบีเลียน

คำตอบของ 't Hooft และ Polyakov นั้นมีความพิเศษ คือ ศักย์เวกเตอร์ของแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นมีค่าต่อเนื่อง ซึ่งลักษณะ นี้แตกต่างจากแม่เหล็กขั้วเดี่ยวของ Dirac ซึ่งค่าของศักย์เวก เตอร์ไม่ต่อเนื่อง ส่วนคำตอบของสนาม Higgs นั้นใช้ในการ อธิบายการทำลายสมมาตรที่เกิดขึ้นเอง (spontaneous sym-

metry breaking) ของแม่เหล็กขั้วเดี่ยว แต่เดิม ทฤษฎีของ Georgi-Glashow มีสมมาตรคือ SU(2) ปรากฏการณ์การทำลายสมมาตรที่เกิดขึ้นเองนี้ ที่ขั้วของแม่เหล็กขั้วเดี่ยวยัง คงมีสมมาตร SU(2) อยู่ แต่ที่บริเวณห่างไกลจากขั้วแม่เหล็ก สมมาตรนี้จะถูกทำลาย

แม่เหล็กขั้วเดี่ยวแบบ 't Hooft และ Polyakov นั้นไม่ได้ถูกจำกัดอยู่แค่ในแบบจำลอง Georgi-Glashow เท่านั้น แต่ ยังพบได้ในทฤษฎีการรวมแรงครั้งใหญ่ (Grand Unified Theory) ชนิดอื่นๆ เช่น SU(5)⁷ ซึ่งเป็นแบบจำลองที่มีการรวมแรง มูลฐาน 3 ชนิด ได้แก่ แรงไฟฟ้าแม่เหล็ก แรงนิวเคลียร์แบบ อ่อน และแรงนิวเคลียร์แบบเข้ม เข้าด้วยกัน

คาดกันว่าทฤษฎีการรวมแรงครั้งใหญ่ ใช้สำหรับอธิบาย ฟิสิกส์มูลฐานที่ระดับพลังงานที่สูงกว่าปัจจุบันมาก นี่จึงเป็น เหตุผลหนึ่งที่อธิบายว่าทำไมยังไม่มีการค้นพบแม่เหล็กขั้ว เดี่ยวในรูปแบบอนุภาคมูลฐาน กล่าวคือ วิธีการหนึ่งที่จะค้น พบแม่เหล็กขั้วเดี่ยวได้ คือ จะต้องรอให้มีการทดลองทาง ฟิสิกส์มูลฐานในระดับพลังงานที่สูงพอที่ทฤษฎีการรวมแรงครั้ง ใหญ่สามารถประยุกต์ใช้ได้

นอกจากการค้นพบว่าแม่เหล็กขั้วเดี่ยวเป็นคำตอบ ของทฤษฎีการรวมแรงครั้งใหญ่แล้ว ยังมีอีกเส้นทางที่น่าสนใจ Prasad และ Sommerfeld⁸ ในปี 1975 และ Bogomolny⁹ ในปี 1976 ค้นพบว่าในกรณีพิเศษ แม่เหล็กขั้วเดี่ยวของ 't Hooft และ Polyakov นั้น สามารถหาคำตอบที่เป็นรูปแบบปิด (closed form) ได้ ซึ่งกรณีพิเศษนี้มีความสำคัญมากและถูก เรียกว่าแม่เหล็กขั้วเดี่ยว BPS (BPS monopole) แม่เหล็กขั้ว เดี่ยวชนิดนี้ถูกประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาทฤษฎีจำนวนมาก โดยเฉพาะทางด้านทฤษฎีสมมาตรยิ่งยวด (supersymmetry) และ ทฤษฎีสตริง (string theory) โดยแม่เหล็กขั้วเดี่ยว BPS เป็น กุญแจสำคัญในการช่วยเพิ่มความเข้าใจความสมมาตรใน ทฤษฎีเหล่านี้

สรุป

แม่เหล็กขั้วเดี่ยวในทางทฤษฎีถูกเสนอโดย Dirac ในปี 1931 ซึ่งการมีอยู่ของแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นเป็นปรากฏการณ์ทาง ควอนตัม การมีอยู่ของแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นจะให้ผลว่าประจุไฟฟ้า มีค่าไม่ต่อเนื่อง

ทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นถูกพัฒนามาต่อเนื่องนับ ตั้งแต่นั้นมา มีการค้นพบว่าแม่เหล็กขั้วเดี่ยวนั้นมีความสัมพันธ์ อย่างแยกไม่ได้จากทฤษฎีทางมูลฐานของฟิสิกส์อนุภาค และ การประยุกต์ใช้ทฤษฎีแม่เหล็กขั้วเดี่ยวกับทฤษฎีต่างๆ ทาง ฟิสิกส์อนุภาคทำให้เกิดความเข้าใจทฤษฎีเหล่านั้นได้ดีขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ เสกสรร สุชะเสนา และ จารุณี
เนียมทอง สำหรับข้อเสนอนี้และต่าง ๆ

เอกสารอ้างอิง

1. Dirac PAM. Quantized Singularities in the Electro-magnetic Field. Proc Roy Soc Lond. 1931;A133:60–72.
2. 't Hooft G. Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories. Nucl Phys. 1974;B79:276–284.
3. Polyakov AM. Particle Spectrum in the Quantum Field Theory. JETP Lett. 1974;20:194–195.
4. Wu TT, Yang CN. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields. Phys Rev. 1975;D12:3845–3857.
5. Yang CN, Mills RL. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. Phys Rev. 1954;96:191–195.
6. Georgi H, Glashow SL. Unified weak and electromagnetic interactions without neutral currents. Phys Rev Lett. 1972;28:1494.
7. Georgi H, Glashow SL. Unity of All Elementary Particle Forces. Phys Rev Lett. 1974;32:438–441.
8. Prasad MK, Sommerfield CM. An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. Phys Rev Lett. 1975;35:760–762.
9. Bogomolny EB. Stability of Classical Solutions. Sov J Nucl Phys. 1976;24:449.